

Современный
Гуманитарный
Университет

Дистанционное образование

0619.04.03; 1

Рабочий учебник

Фамилия, имя, отчество _____

Факультет _____

Номер контракта _____

ФИЗИКА

ЮНИТА 4

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Москва 2002

ОГЛАВЛЕНИЕ

ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН	5
ЛИТЕРАТУРА	6
ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ	7
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР	9
Глава 1. Механические и электромагнитные колебания	9
§ 1. Гармонические колебания и их характеристики	9
§ 2. Механические гармонические колебания	13
§ 3. Гармонический осциллятор	14
3.1. Пружинный маятник	15
3.2. Физический маятник	15
3.3. Математический маятник	17
§ 4. Свободные гармонические колебания в колебательном контуре	18
§ 5. Сложение гармонических колебаний	21
5.1. Сложение двух одинаково направленных гармонических колебаний одинаковой частоты	21
5.2. Биения	22
5.3. Фурье-анализ	24
5.4. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты	24
5.5. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний разной частоты	26
§ 6. Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний (механических и электромагнитных) и его решение	28
6.1. Свободные затухающие колебания пружинного маятника	31
6.2. Свободные затухающие колебания в электрическом колебательном контуре	32
§ 7. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (механических и электромагнитных) и его решение	33
§ 8. Резонанс	36
§ 9. Автоколебания	40
§ 10. Переменный ток	41
10.1. Процессы, происходящие на участке цепи, содержащем резистор	42
10.2. Процессы, происходящие на участке цепи, содержащем катушку индуктивности	42
10.3. Процессы, происходящие на участке цепи, содержащем конденсатор	43

10.4. Цепь переменного тока, содержащая последовательно включенные резистор, катушку индуктивности и конденсатор	45
10.5. Цепь переменного тока, содержащая параллельно включенные катушку индуктивности и конденсатор	48
§ 11. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока	50
Глава 2. Упругие волны	52
§ 12. Волновые процессы. Продольные и поперечные волны	52
§ 13. Уравнение бегущей волны. Фазовая скорость. Волновое уравнение	54
§ 14. Принцип суперпозиции. Групповая скорость	56
§ 15. Интерференция волн	58
§ 16. Стоячие волны	60
§ 17. Дифракция	63
Глава 3. Основы акустики	65
§ 18. Звуковые волны	65
§ 19. Эффект Доплера в акустике	68
19.1. Источник и приемник покоятся относительно среды, т. е. $v_{\text{ист}} = v_{\text{пр}} = 0$	69
19.2. Приемник приближается к источнику, а источник покоится, т. е. $v_{\text{пр}} > 0$, $v_{\text{ист}} = 0$	69
19.3. Источник приближается к приемнику, а приемник покоится, т. е. $v_{\text{ист}} > 0$, $v_{\text{пр}} = 0$	69
19.4. Источник и приемник движутся относительно друг друга	70
§ 20. Ультразвук и его применение	71
Глава 4. Электромагнитные волны	72
§ 21. Экспериментальное получение электромагнитных волн	72
§ 22. Дифференциальное уравнение электромагнитной волны	75
§ 23. Энергия электромагнитных волн. Импульс электромагнитного поля	78
§ 24. Излучение диполя. Применение электромагнитных волн	79
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ	82
ТРЕНИНГ УМЕНИЙ	85
ГЛОССАРИЙ*	

ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Механические и электромагнитные колебания. Гармонические колебания и их характеристики. Механические гармонические колебания. Гармонический осциллятор. Пружинный, физический и математический маятники. Свободные гармонические колебания в колебательном контуре. Сложение гармонических колебаний. Фурье-анализ. Дифференциальное уравнение свободных затухающих и вынужденных колебаний и его решение. Резонанс. Переменный ток. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока.

Упругие волны. Волновые процессы. Продольные и поперечные волны. Уравнение бегущей волны. Фазовая скорость. Волновое уравнение. Принцип суперпозиции. Групповая скорость. Интерференция волн. Стоячие волны. Дифракция.

Основы акустики. Звуковые волны. Эффект Доплера в акустике. Ультразвук и его применение.

Электромагнитные волны. Экспериментальное получение электромагнитных волн. Дифференциальное уравнение электромагнитной волны. Энергия электромагнитных волн. Импульс электромагнитного поля. Излучение диполя. Применение электромагнитных волн.

ЛИТЕРАТУРА

Базовая

1. Трофимова Т.И. Курс физики. – М., Высшая школа. 2000.
2. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М., Высшая школа. 2000.

Дополнительная

3. Бабаджан Е.И., Гервидс В.И., Дубовик В.М., Нерсесов Э.А. Сборник качественных вопросов и задач по общей физике. – М., Наука. 1990.
4. Калашников С.Г., Электричество. – М., Наука, 1998.
5. Савельев И.В. Курс общей физики. Книга 4. Волны. Оптика. – М., Наука. 1998.
6. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.4. Колебания и волны. – М., Наука. 1998.
7. Стрелков С.П., Сивухин Д.В., Угаров В.А., Яковлев И.А. Сборник задач по общему курсу физики. Т.4. Колебания и волны. – М., Наука. 1998.

ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ

№ п/п	Умение	Алгоритмы
1	Провести анализ уравнения колебания	1. Уравнение гармонического колебания имеет вид $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. По данным задачи составить уравнение такого вида, учитывая, что $T = 2\pi / \omega_0$, A – амплитуда колебания. 2. Составить уравнение для скорости точки: $v_x = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2)$, где $v_m = A\omega_0$. 3. Составить уравнение для ускорения гармонически колеблющейся точки: $a_x = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi)$, где $a_m = A\omega_0^2$. 4. Согласно второму закону Ньютона найти максимальную силу, действующую на точку: $F_m = ma_m$. 5. Составить выражение для кинетической энергии: $K = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$. 6. Составить выражение для потенциальной энергии: $\Pi = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$. 7. Составить выражение для полной энергии: $E = K + \Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$. 8. Подставить в данные уравнения предложенное время и найти искомые величины.
2	Решить задачу на определение силы тока, напряжения, сопротивления или выделяемой мощности на каком-либо участке цепи	1. Начертить схему и указать на ней все элементы цепи: источники тока, резисторы и конденсаторы. 2. Установить (если схема дается в готовом виде), какие элементы цепи включены последовательно, а какие параллельно. 3. Определить величину емкостного ($R_C = 1/(\omega C)$) и индуктивного ($R_L = \omega L$) сопротивлений.

№ п/п	Умение	Алгоритмы
		4. Определить полное сопротивление цепи $Z = \sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}.$ 5. Используя закон Ома для цепи переменного тока, установить связь между токами и напряжениями. 6. Найти коэффициент мощности $\cos \varphi$ и сдвиг фаз. 7. Вычислить активную мощность.
3	Построить векторную диаграмму для данной электрической цепи	1. Определить, какие элементы составляют цепь. 2. Разбить сложную цепь на простые участки. 3. Для каждого участка выбрать постоянную величину и наложить ее на ось x. 4. Для каждого участка построить вектора тока и напряжения так, чтобы угол между ними соответствовал сдвигу по фазе. 5. Совместить построенные диаграммы, наложив равные величины. 6. Найти разность фаз между полным током и полным напряжением.
4	Рассчитать диапазон длин волн, на который рассчитан колебательный контур	1. По формуле Томсона рассчитать граничные периоды колебаний данного контура. 2. Учитывая, что скорость распространения радиоволн 300000 км/с, вычислить длины волн.

ГЛАВА 1. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 1. Гармонические колебания и их характеристики

Колебаниями называются процессы (движения или изменения состояния), обладающие той или иной степенью повторяемости во времени. Колебательные процессы широко распространены в природе и технике, например: качание маятника часов, переменный электрический ток и т. д. При колебательном движении маятника изменяется координата его центра масс, в случае переменного тока колеблются напряжение и ток в цепи. Физическая природа колебаний может быть разной, поэтому различают колебания механические, электромагнитные и др. Однако различные колебательные процессы описываются одинаковыми характеристиками и одинаковыми уравнениями. Отсюда следует целесообразность единого подхода к изучению колебаний различной физической природы. Например, единый подход к изучению механических и электромагнитных колебаний применялся английским физиком Д. У. Рэлеем (1842–1919), русским физиком А. Г. Столетовым (1839–1896), русским инженером-экспериментатором П. Н. Лебедевым (1866–1912). Большой вклад в развитие теории колебаний внесли Л. И. Мандельштам (1879–1944) и его ученики.

Система, совершающая колебания, называется колебательной.

Колебания называются **свободными (или собственными)**, если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему. Простейшим типом колебаний являются **гармонические колебания** – колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса (косинуса). Рассмотрение гармонических колебаний важно по двум причинам: 1) колебания, встречающиеся в природе и технике, часто имеют характер, близкий к гармоническому; 2) различные периодические процессы (процессы, повторяющиеся через равные промежутки времени) можно представить как наложение гармонических колебаний. Гармонические колебания величины s описываются уравнением типа

$$s = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad \text{где } \omega_0 \text{ — частота колебаний.} \quad (1.1)$$

где A – максимальное значение колеблющейся величины, называемое **амплитудой колебания**, ω_0 – круговая (циклическая) частота, φ – началь-

* Жирным шрифтом выделены новые понятия, которые необходимо усвоить. Знание этих понятий будет проверяться при тестировании.

ная фаза колебания в момент времени $t = 0$, $(\omega_0 t + \varphi)$ – фаза колебания в момент времени t . Фаза колебания определяет значение колеблющейся величины в данный момент времени. Так как косинус изменяется в пределах от $+1$ до -1 , то s может принимать значения от $+A$ до $-A$.

Определенные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через промежуток времени T , называемый **периодом колебания**, за который фаза колебания получает приращение 2π , т.е.

$$\omega_0(t + T) + \varphi = (\omega_0 t + \varphi) + 2\pi,$$

откуда

$$T = 2\pi/\omega_0. \quad (1.2)$$

Величина, обратная периоду колебаний:

$$\nu = 1/T, \quad (1.3)$$

т.е. число полных колебаний, совершаемых в единицу времени, называется **частотой колебаний**. Сравнивая уравнения (1.2) и (1.3), получим

$$\omega_0 = 2\pi\nu.$$

Единица частоты – герц (Гц): 1 Гц – частота периодического процесса, при которой за 1 с совершается один цикл процесса.

Запишем первую и вторую производные по времени от гармонически колеблющейся величины s :

$$\frac{ds}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2); \quad (1.4)$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi), \quad (1.5)$$

т.е. имеем гармонические колебания с той же циклической частотой. Амплитуды величин (1.4) и (1.5) соответственно равны $A\omega_0$ и $A\omega_0^2$. Фаза величины (1.4) отличается от фазы величины (1.1) на $\pi/2$, а фаза величины (1.5) отличается от фазы величины (1.1) на π . Следовательно, в моменты

времени, когда $s = 0$, $\frac{ds}{dt}$ приобретает наибольшие значения; когда же s достигает максимального отрицательного значения, то $\frac{d^2s}{dt^2}$ приобретает

наибольшее положительное значение (рис. 1).

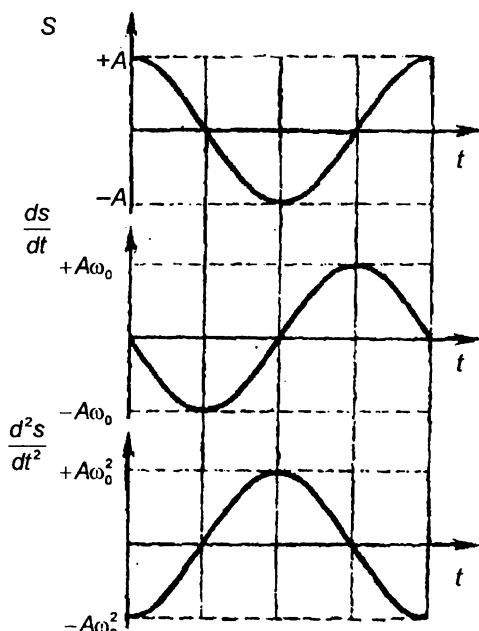


Рис. 1

Из выражения (1.5) следует дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0, \quad (1.6)$$

где $s = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Решением этого уравнения является выражение (1.1).

Гармонические колебания изображаются графически методом вращающегося вектора амплитуды, или методом векторных диаграмм. Для этого из произвольной точки O , выбранной на оси x , под углом φ , равным начальной фазе колебания, откладывается вектор $\vec{A}$, модуль которого равен амплитуде A рассматриваемого колебания (рис. 2). Если этот вектор привести во вращение с угловой скоростью ω_0 , равной циклической частоте колебаний, то проекция конца вектора будет перемещаться по оси x и принимать значения от $-A$ до $+A$, а колеблющаяся величина будет изменяться

со временем по закону $s = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Таким образом, гармоническое колебание можно представить проекцией на некоторую произвольно выбранную ось вектора амплитуды $\vec{A}$, отложенного из произвольной точки оси под углом φ , равным начальной фазе, вращающегося с угловой скоростью ω_0 вокруг этой точки.

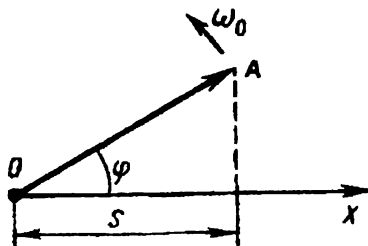


Рис. 2

В физике часто применяется другой метод, который отличается от метода вращающегося вектора амплитуды лишь по форме. В этом методе колеблющуюся величину представляют комплексным числом. Согласно формуле Эйлера [Л. Эйлер – русский ученый (1707-1783)], для комплексных чисел

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad (1.7)$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Поэтому уравнение гармонического колебания (1.1) можно записать в комплексной форме:

$$\bar{s} = A e^{i(\omega_0 t + \varphi)}. \quad (1.8)$$

Вещественная часть выражения (1.8)

$$\text{Re}(\bar{s}) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = s$$

представляет собой гармоническое колебание. Обозначение Re вещественной части условимся опускать и выражение (1.8) будем записывать в виде

$$s = A e^{i(\omega_0 t + \varphi)}.$$

В теории колебаний принимается, что колеблющаяся величина s равна вещественной части комплексного выражения, стоящего в этом равенстве справа.

§ 2. Механические гармонические колебания

Пусть материальная точка совершает прямолинейные гармонические колебания вдоль оси координат x около положения равновесия, принятого за начало координат. Тогда зависимость координаты x от времени t задается уравнением, аналогичным уравнению (1.1), где $s = x$:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (2.1)$$

Согласно выражениям (1.4) и (1.5), скорость v и ускорение a колеблющейся точки соответственно равны

$$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2);$$

$$a = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi). \quad (2.2)$$

Сила $F = ma$, действующая на колеблющуюся материальную точку массой m , с учетом выражений (2.1) и (2.2) равна $F = -m\omega_0^2 x$.

Следовательно, сила пропорциональна смещению материальной точки из положения равновесия и направлена в противоположную сторону (к положению равновесия).

Кинетическая энергия материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания, равна

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi), \quad (2.3)$$

или

$$K = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (2.4)$$

Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F , равна

$$П = - \int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi), \quad (2.5)$$

или

$$П = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (2.6)$$

Сложив уравнения (2.3) и (2.5), получим формулу для полной энергии

$$E = K + \Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \quad (2.7)$$

Полная энергия остается постоянной, так как при гармонических колебаниях справедлив закон сохранения механической энергии, поскольку упругая сила консервативна.

Из формул (2.4) и (2.6) следует, что K и Π изменяются с частотой $2\omega_0$, т. е. с частотой, которая в два раза превышает частоту гармонического колебания. На рис. 3 представлены графики зависимости x , K и Π от времени.

Так как $\langle \sin^2 \alpha \rangle = \langle \cos^2 \alpha \rangle = \frac{1}{2}$, то из формул (2.3), (2.5) и (2.7) следует, что $\langle K \rangle = \langle \Pi \rangle = 1/2 E$.

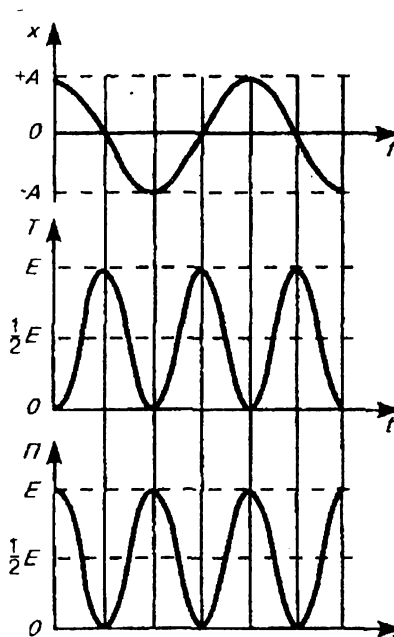


Рис. 3

§ 3. Гармонический осциллятор

Гармоническим осциллятором называется система, совершающая колебания, описываемые уравнением вида (1.6)

$$s'' + \omega_0^2 s = 0. \quad (3.1)$$

Колебания гармонического осциллятора являются важным примером периодического движения и служат точной или приближенной моделью во многих задачах классической и квантовой физики. Примерами гармонического осциллятора являются рассмотренные ниже маятники.

3.1. Пружинный маятник

Пружинный маятник – это груз массой m , подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы $F = -kx$, где k – жесткость пружины. Уравнение движения маятника

$$mx'' = -kx, \text{ или } x'' + \frac{k}{m}x = 0.$$

Из последнего уравнения и выражений (3.1) и (1.1) следует, что пружинный маятник совершает гармонические колебания по закону $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad (3.2)$$

и периодом

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}. \quad (3.3)$$

Формула (3.3) справедлива для упругих колебаний в пределах, в которых выполняется закон Гука, т. е. когда масса пружины мала по сравнению с массой тела. Потенциальная энергия пружинного маятника, согласно формулам (2.5) и (3.2), равна

$$\Pi = kx^2/2.$$

3.2. Физический маятник

Физический маятник – это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку O , не совпадающую с центром масс C тела (рис. 4).

Если маятник отклонен из положения равновесия на некоторый угол α , то в соответствии с уравнением динамики вращательного движения твердого тела момент M возвращающей силы можно записать в виде

$$M = J\varepsilon = J\alpha'' = F_{\tau}l = -mgl \sin \alpha \approx -mgl\alpha, \quad (3.4)$$

где J – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса O ; l – расстояние между ней и центром масс маятника; $F_{\tau} = -mg \sin \alpha \approx -mg\alpha$ – возвращающая сила (знак минус обусловлен тем, что направления F_{τ} и α всегда противоположны; $\sin \alpha \approx \alpha$ соответствует малым колебаниям маятника, т. е. малым отклонениям маятника от положения равновесия).

Уравнение (3.4) можно записать в виде

$$J\alpha'' + mgl\alpha = 0, \text{ или } \alpha'' + \frac{mgl}{J}\alpha = 0.$$

Принимая

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}, \quad (3.5)$$

получим уравнение $\alpha'' + \omega_0^2\alpha = 0$ идентичное с выражением (3.1), решение которого (1.1) известно:

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (3.6)$$

Из выражения (3.6) следует, что при малых колебаниях физический маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой ω_0

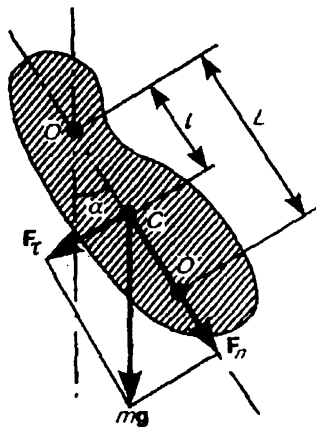


Рис. 4

[см. уравнение (3.5)] и периодом

$$T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (3.7)$$

где $L = \frac{J}{ml}$ – приведенная длина физического маятника.

Точка O' на продолжении прямой OC , отстоящая от точки O подвеса маятника на расстоянии приведенной длины L , называется центром качаний физического маятника (рис. 4). Применяя теорему Штейнера, получим

$$L = \frac{J}{ml} = \frac{J_c + ml^2}{ml} = l + \frac{J_c}{ml} > l,$$

т. е. OO' всегда больше OC . Точка подвеса O маятника и центр качаний O' обладают свойством взаимозаменяемости: если точку подвеса перенести в центр качаний, то прежняя точка O подвеса станет новым центром качаний, и период колебаний физического маятника не изменится.

3.3. Математический маятник

Математический маятник – это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m , подвешенной на нерастяжимой невесомой нити, и колеблющаяся под действием силы тяжести. Хорошим приближением математического маятника является небольшой тяжелый шарик, подвешенный на тонкой длинной нити. Момент инерции математического маятника

$$J = ml^2, \quad (3.8)$$

где l – длина маятника.

Математический маятник – частный случай физического маятника. Вся его масса сосредоточена в одной точке – центре масс. Подставив выражение (3.8) в формулу (3.7), получим выражение для периода малых колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (3.9)$$

Сравнивая формулы (3.7) и (3.9), видим, что если приведенная длина L физического маятника равна длине l математического маятника, то периоды колебаний этих маятников одинаковы. Следовательно, приведенная

длина физического маятника – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

§ 4. Свободные гармонические колебания в колебательном контуре

Среди различных электрических явлений особое место занимают электромагнитные колебания, при которых электрические величины (заряды, токи) периодически изменяются и которые сопровождаются взаимными превращениями электрического и магнитного полей. Для возбуждения и поддержания электромагнитных колебаний используется **колебательный контур** – цепь, состоящая из включенных последовательно катушки индуктивностью L , конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R .

Рассмотрим последовательные стадии колебательного процесса в идеализированном контуре, сопротивление которого пренебрежимо мало ($R \approx 0$). Для возбуждения в контуре колебаний конденсатор предварительно заряжают, сообщая его обкладкам заряды $\pm Q$. Тогда в начальный момент времени $t = 0$ (рис. 5, а) между обкладками конденсатора возникнет электрическое

поле, энергия которого $\frac{1}{2C} Q^2$. Если замкнуть конденсатор на катушку индуктивности, он начнет разряжаться, и в контуре потечет возрастающий со временем ток I . В результате энергия электрического поля будет уменьшаться, а энергия магнитного поля катушки (она равна $\frac{1}{2} L I^2$) – возрастать.

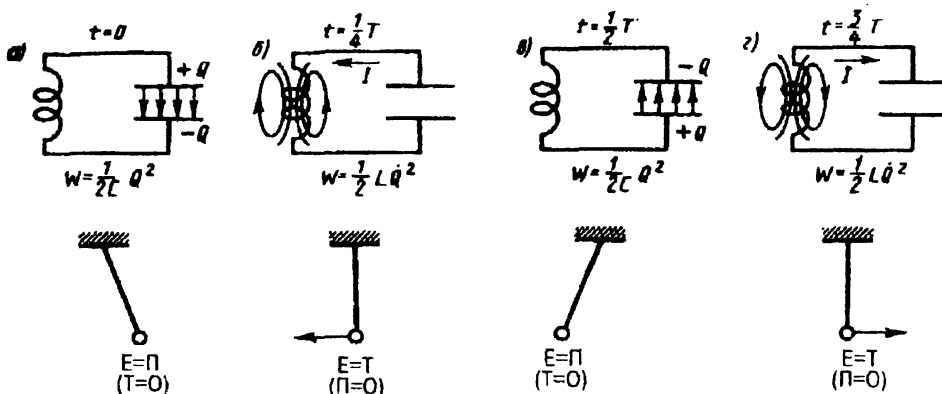


Рис. 5

Так как $R \approx 0$, то, согласно закону сохранения энергии, полная энергия

$$W = \frac{1}{2C} Q^2 + \frac{1}{2} L I^2 = \text{const},$$

так как она на нагревание не расходуется. Поэтому в момент $t = T/4$, когда конденсатор полностью разрядится, энергия электрического поля обращается в нуль, а энергия магнитного поля (а следовательно, и ток) достигает наибольшего значения (рис. 5,б). Начиная с этого момента ток в контуре будет убывать; следовательно, начнет ослабевать магнитное поле катушки, и в ней индуцируется ток, который течет (согласно правилу Ленца) в том же направлении, что и ток разрядки конденсатора. Конденсатор начнет перезаряжаться, возникнет электрическое поле, стремящееся ослабить ток, который в конце концов обратится в нуль, а заряд на обкладках конденсатора достигнет максимума (рис. 5,в). Далее те же процессы начнут протекать в обратном направлении (рис. 5,г) и система к моменту времени $t = T$ придет в первоначальное состояние (рис. 5,а). После этого начнется повторение рассмотренного цикла разрядки и зарядки конденсатора. Если бы потерь энергии не было, то в контуре совершались бы периодические незатухающие колебания, т. е. периодически изменялись (колебались) бы заряд Q на обкладках конденсатора, напряжение U на конденсаторе и сила тока I , текущего через катушку индуктивности. Следовательно, в контуре возникают электрические колебания, причем колебания сопровождаются превращениями энергий электрического и магнитного полей.

Электрические колебания в колебательном контуре можно сопоставить с механическими колебаниями маятника (рис. 5, внизу), сопровождающимися взаимными превращениями потенциальной и кинетической энергий маятника. В данном случае энергия электрического поля конденсатора

($\frac{1}{2C} Q^2$) аналогична потенциальной энергии маятника, энергия магнитного поля катушки ($\frac{1}{2} L I^2$) – кинетической энергии, сила тока в контуре – скорость

движения маятника. Индуктивность L играет роль массы m , а сопротивление контура – роль силы трения, действующей на маятник.

Согласно закону Ома, для контура, содержащего катушку индуктивностью L , конденсатор емкостью C и резистор сопротивлением R :

$$IR + U_c = \xi_c,$$

где IR – напряжение на резисторе, $U_c = Q/C$ – напряжение на конденсаторе.

ре, $\xi_c = -L \frac{dl}{dt}$ – ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке при протекании в ней переменного тока (ξ_c – единственная ЭДС в контуре). Следовательно:

$$IR + \frac{Q}{C} + L \frac{dl}{dt} = 0. \quad (4.1)$$

Разделив уравнение (4.1) на L и подставив $l = Q'$, $\frac{dl}{dt} = Q''$, получим дифференциальное уравнение колебаний заряда Q в контуре

$$Q'' + \frac{R}{L} Q' + \frac{1}{LC} Q = 0. \quad (4.2)$$

В данном колебательном контуре внешние ЭДС отсутствуют, поэтому рассматриваемые колебания представляют собой свободные колебания (см. § 1). Если сопротивление $R = 0$, то свободные электромагнитные колебания в контуре являются гармоническими. Тогда из уравнения (4.2) получим дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний заряда в контуре

$$Q'' + \frac{1}{LC} Q = 0.$$

Из последней формулы и выражений (3.1) и (1.1) вытекает, что заряд Q , совершает гармонические колебания по закону

$$Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (4.3)$$

где Q_m – амплитуда колебаний заряда конденсатора с циклической частотой ω_0 , называемой собственной частотой контура, т. е.

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad (4.4)$$

и периодом

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad \text{формула Томсона} \quad (4.5)$$

Формула (4.5) впервые была получена английским физиком У. Томсоном (1824–1907). Она называется формулой Томсона.

Сила тока в колебательном контуре [см. формулу (1.4)]

$$I = Q' = -Q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2), \quad (4.6)$$

где $I_m = -Q_m \omega_0$ – амплитуда силы тока. Напряжение на конденсаторе

$$U_c = \frac{Q}{C} = \frac{Q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (4.7)$$

где $U_m = \frac{Q_m}{C}$ – амплитуда напряжения.

Из выражений (4.3) и (4.6) вытекает, что колебания тока I опережают по фазе колебания заряда Q , на $\pi/2$, т. е., когда ток достигает максимального значения, заряд (а также и напряжение [см. формулу (4.7)] обращается в нуль, и наоборот.

§ 5. Сложение гармонических колебаний

Сложение колебаний – нахождение закона результирующих колебаний системы, если эта система участвует в нескольких колебательных процессах.

5.1. Сложение двух одинаково направленных гармонических колебаний одинаковой частоты

Сложим гармонические колебания одного направления и одинаковой частоты

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2), \end{cases}$$

воспользовавшись методом вращающегося вектора амплитуды (см. § 1). Построим векторные диаграммы этих колебаний (рис. 6). Так как векторы A_1 и A_2 вращаются с одинаковой угловой скоростью ω_0 , то разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ между ними остается постоянной. Очевидно, что уравнение результирующего колебания будет

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (5.1)$$

В выражении (5.1) амплитуда A и начальная фаза φ соответственно задаются соотношениями

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1); \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (5.2)$$

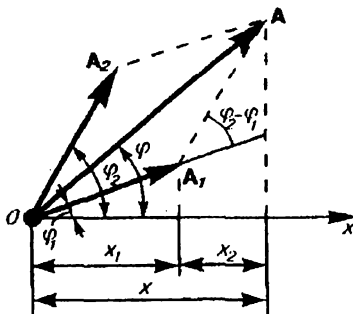


Рис. 6

Таким образом, тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершает также гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания. Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз ($\varphi_2 - \varphi_1$) складываемых колебаний.

Проанализируем выражение (5.2) в зависимости от разности фаз ($\varphi_2 - \varphi_1$):

1) $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), тогда $A = A_1 + A_2$, т. е. амплитуда результирующего колебания A равна сумме амплитуд складываемых колебаний;

2) $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m+1)\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), тогда $A = |A_1 - A_2|$, т. е. амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд складываемых колебаний.

5.2. Биеения

Для практики особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. В результате сложения этих колебаний получаются колебания с периодически изменяющейся амплитудой. Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний с близкими частотами, называются **биеениями**.

Пусть амплитуды складываемых колебаний равны A , а частоты равны ω и $\omega + \Delta\omega$, причем $\Delta\omega \ll \omega$. Начало отсчета выберем так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos \omega t, \\ x_2 = A_2 \cos(\omega + \Delta\omega)t. \end{cases}$$

Складывая эти выражения и учитывая, что во втором множителе $\Delta\omega/2 \ll \omega$, найдем

$$x = \left(2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t. \quad (5.3)$$

Результирующее колебание (5.3) можно рассматривать как гармоническое с частотой ω , амплитуда A_6 которого изменяется по следующему периодическому закону:

$$A_6 = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|. \quad (5.4)$$

Частота изменения A_6 в два раза больше частоты изменения косинуса (так как берется по модулю), т. е. частота биений равна разности частот складываемых колебаний: $\omega_6 = \Delta\omega$. Период биений $T_6 = 2\pi / \Delta\omega$. Характер зависимости (5.3) показан на рис. 7, где сплошные жирные линии дают график результирующего колебания (5.3), а огибающие их – график медленно меняющейся согласно уравнению (5.4) амплитуды.

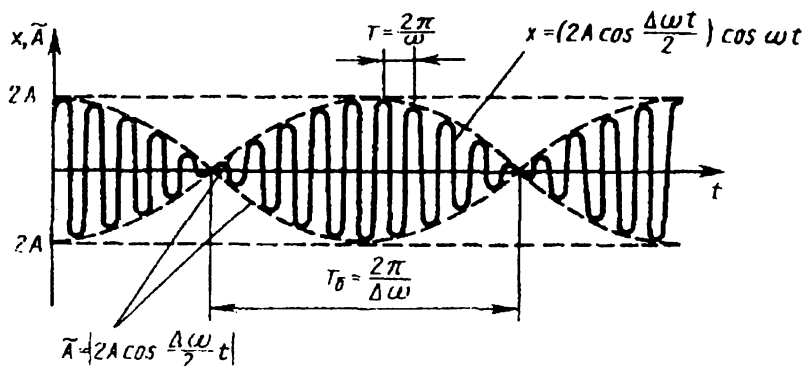


Рис. 7

Метод биений используется для настройки музыкальных инструментов, анализа слуха и т. д.

5.3. Фурье-анализ

В результате сложения гармонических колебаний, совпадающих по направлению и имеющих кратные циклические частоты ω , 2ω , 3ω и т. д., получаются периодические негармонические колебания с периодом $T = 2\pi / \omega$. В свою очередь, любое сложное периодическое колебание $s = f(t)$ можно представить в виде суммы простых гармонических колебаний с циклическими частотами, кратными основной циклической частоте $\omega = 2\pi / T$, где T – период колебания:

$$s = f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n). \quad (5.5)$$

Такое представление периодической функции $f(t)$ называется разложением ее в ряд Фурье или гармоническим анализом сложного периодического колебания. Члены ряда Фурье, соответствующие гармоническим колебаниям с циклическими частотами ω , 2ω , 3ω и т. д., называются первой (или основной), второй, третьей и т. д. гармониками сложного периодического колебания $s = f(t)$. Совокупность этих гармоник образует спектр колебания $s = f(t)$. Состав спектра зависит от вида периодической функции $f(t)$. В простейших случаях спектр может состоять из небольшого числа гармоник.

Спектр колебания – совокупность частот простых гармонических колебаний, в результате сложения которых может быть получено сложное колебание. Периодические колебания имеют дискретные (линейчатые) спектры частот.

Непериодические колебания, как правило, имеют непрерывный (сплошной) спектр частот, т. е. их можно представить как результат наложения множества гармонических колебаний, частоты которых принимают всевозможные значения в некотором интервале (в общем случае от 0 до ∞).

5.4. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты

Рассмотрим результат сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты ω , происходящих во взаимно перпендикулярных направ-

лениях вдоль осей x и y . Для простоты начало отсчета выберем так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю, и запишем

$$\begin{cases} x = A \cos \omega t, \\ y = B \cos(\omega t + \alpha), \end{cases} \quad (5.6)$$

где α – разность фаз обоих колебаний, A и B – амплитуды складываемых колебаний.

Уравнение траектории результирующего колебания находится исключением из выражений (5.6) параметра t . Записывая складываемые колебания в виде

$$x/A = \cos \omega t,$$

$$y/B = \cos(\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha$$

и заменяя во втором уравнении $\cos \omega t$ на x/A и $\sin \omega t$ на $\sqrt{1 - (x/A)^2}$, получим уравнение эллипса, оси которого ориентированы относительно координатных осей произвольно:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \alpha. \quad (5.7)$$

Так как траектория результирующего колебания имеет форму эллипса, то такие колебания называются эллиптически поляризованными.

Ориентация эллипса и размеры его осей зависят от амплитуд складываемых колебаний и разности фаз α . Рассмотрим некоторые частные случаи, представляющие физический интерес:

1) $\alpha = m\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). В данном случае эллипс вырождается в отрезок прямой

$$y = \pm (B/A)x, \quad (5.8)$$

где знак плюс соответствует нулю и четным значениям m (рис. 8,а), а знак минус – нечетным значениям m (рис. 8,б). Результирующее колебание является гармоническим колебанием с частотой ω и амплитудой $\sqrt{A^2 + B^2}$, совершающимся вдоль прямой (5.8), составляющей с осью x угол

$\varphi = \arctg\left(\frac{B}{A} \cos m\pi\right)$. В данном случае имеем дело с линейно поляризованными колебаниями;

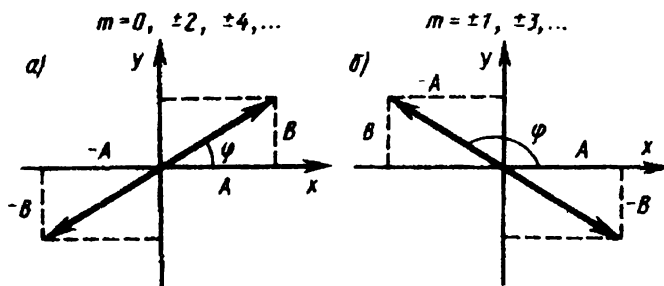


Рис. 8

2) $\alpha = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). В данном случае уравнение примет вид

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \quad (5.9)$$

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, а его полуоси равны соответствующим амплитудам (рис. 9). Кроме того, если $A = B$, то эллипс (5.9) вырождается в окружность. Такие колебания называются циркулярно поляризованными колебаниями или колебаниями, поляризованными по кругу.

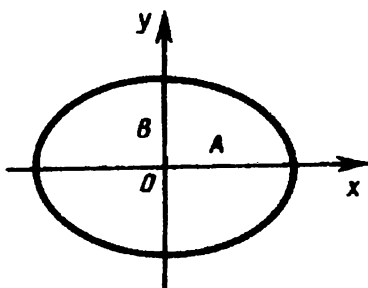


Рис. 9

5.5. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний разной частоты

Если частоты складываемых взаимно перпендикулярных колебаний различны, то замкнутая траектория результирующего колебания довольно

сложна. Замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, называются фигурами Лиссажу [Ж. Лиссажу (1822–1880) – французский физик]. Вид этих кривых зависит от соотношения амплитуд, частот и разности фаз складываемых колебаний. На рис. 10 представлены фигуры Лиссажу для различных соотношений частот (указаны слева) и разностей фаз (указаны вверху; разность фаз принимается равной φ).

Отношение частот складываемых колебаний равно отношению числа пересечений фигур Лиссажу с прямыми, параллельными осям координат.

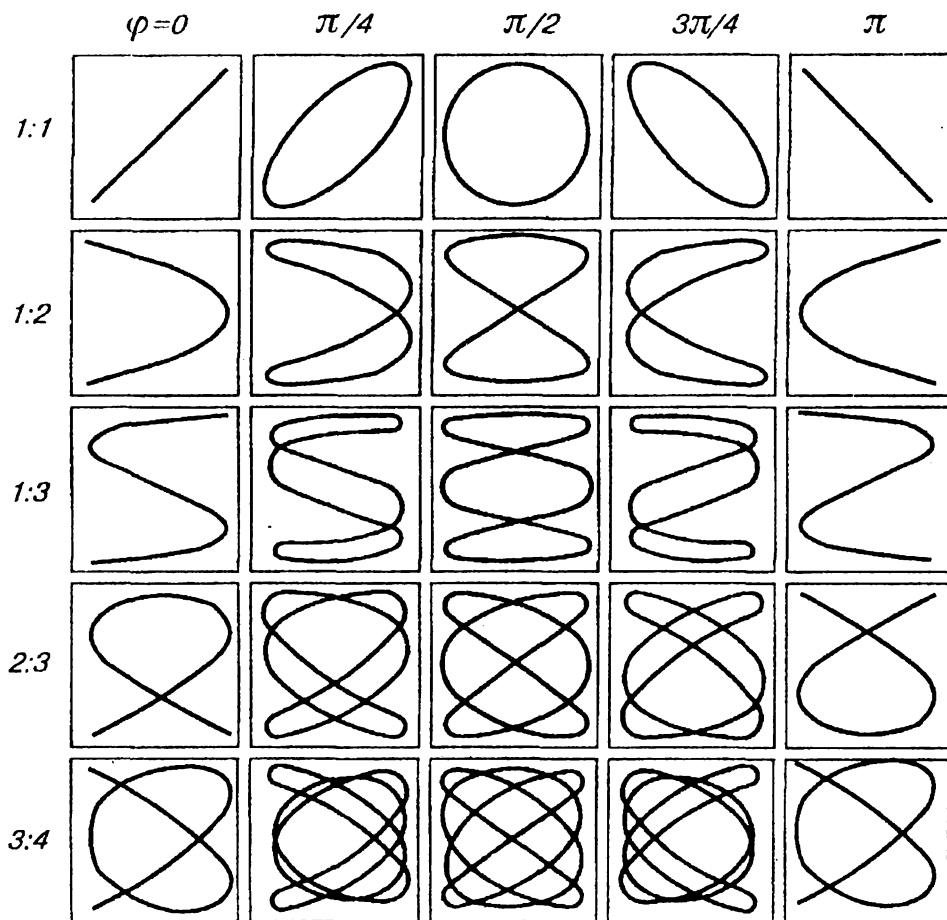


Рис. 10

По виду фигур можно определить неизвестную частоту по известной или определить отношение частот складываемых колебаний. Поэтому анализ фигур Лиссажу – широко используемый метод исследования соотношений частот и разности фаз складываемых колебаний, а также формы колебаний.

§ 6. Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний (механических и электромагнитных) и его решение

Рассмотрим **свободные затухающие колебания** – колебания, амплитуды которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшаются. Простейшим механизмом уменьшения энергии колебаний является ее превращение в теплоту вследствие трения в механических колебательных системах, а также омических потерь и излучения электромагнитной энергии в электрических колебательных системах.

Закон затухания колебаний определяется свойствами колебательных систем. Обычно рассматривают **линейные системы** – идеализированные реальные системы, в которых параметры, определяющие физические свойства системы, в ходе процесса не изменяются. Линейными системами являются, например, пружинный маятник при малых растяжениях пружины, когда справедлив закон Гука [Р. Гук – английский физик (1635–1703)], колебательный контур, индуктивность, емкость и сопротивление которого не зависят ни от тока в контуре, ни от напряжения. Различные по своей природе линейные системы описываются идентичными линейными дифференциальными уравнениями, что позволяет подходить к изучению колебаний различной физической природы с единой точки зрения, а также проводить их моделирование, в том числе и на ЭВМ.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы задается в виде

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0, \quad (6.1)$$

где s – колеблющаяся величина, описывающая тот или иной физический процесс, $\delta = \text{const}$ – коэффициент затухания, ω_0 – циклическая частота свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы, т. е. при $\delta = 0$ (при отсутствии потерь энергии) называется собственной частотой колебательной системы.

Решение уравнения (6.1) рассмотрим в виде

$$s = e^{-\delta t} u, \quad (6.2)$$

где $u = u(t)$. После нахождения первой и второй производных выражения (6.2) и подстановки их в (6.1) получим

$$u'' + (\omega_0^2 - \delta^2)u = 0. \quad (6.3)$$

Решение уравнения (6.3) зависит от знака коэффициента перед искомой величиной. Рассмотрим случай, когда этот коэффициент положителен:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \quad (6.4)$$

[если $(\omega_0^2 - \delta^2) > 0$, то такое обозначение мы вправе сделать]. Тогда получим уравнение типа (3.1) $u'' + \omega^2 u = 0$, решением которого является функция $u = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ [см. формулу (1.1)]. Таким образом, решение уравнения (6.1) в случае малых затуханий ($\delta^2 \ll \omega_0^2$) имеет вид

$$s = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (6.5)$$

где

$$A = A_0 e^{-\delta t} \quad (6.6)$$

– амплитуда затухающих колебаний, а A_0 – начальная амплитуда. Зависимость (6.5) показана на рис. 11 сплошной линией, а зависимость (6.6) – штриховыми линиями. Промежуток времени $\tau = 1/\delta$, в течение которого ам-

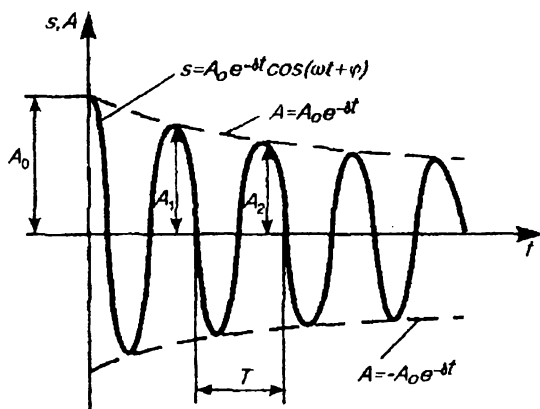


Рис. 11

плитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз, называется **временем релаксации**.

Затухание нарушает периодичность колебаний, поэтому затухающие колебания не являются периодическими и, строго говоря, к ним неприменимо понятие периода или частоты. Однако если затухание мало, то можно условно пользоваться понятием периода как промежутка времени между двумя последующими максимумами (или минимумами) колеблющейся физической величины (см. рис. 11). Тогда период затухающих колебаний с учетом формулы (6.4) равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

Если $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период, то отношение

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{-\delta T}$$

называется декрементом затухания, а его логарифм

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e} \quad (6.7)$$

называется логарифмическим декрементом затухания; N_e – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз. Логарифмический декремент затухания – постоянная для данной колебательной системы величина.

Для характеристики колебательной системы пользуются понятием добротности Q , которая при малых значениях логарифмического декремента равна

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta} \quad (6.8)$$

(так как затухание мало ($\delta^2 \ll \omega_0^2$), то T принято равным T_0).

Из формулы (6.8) следует, что добротность пропорциональна числу колебаний N_e , совершаемых системой за время релаксации.

Выводы, полученные для свободных затухающих колебаний линейных систем, применимы для колебаний различной физической природы – меха-

нических (в качестве примера рассмотрим пружинный маятник) и электромагнитных (в качестве примера рассмотрим электрический колебательный контур).

6.1. Свободные затухающие колебания пружинного маятника

Для пружинного маятника (см. § 3) массой m , совершающего малые колебания под действием упругой силы $F = -kx$, сила трения пропорциональна скорости, т. е.

$$F_{\text{тр}} = -rv = -rx',$$

где r – коэффициент сопротивления; знак минус указывает на противоположные направления силы трения и скорости.

При данных условиях закон движения маятника будет иметь вид

$$mx'' = -kx - rx'. \quad (6.9)$$

Используя формулу $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ [см. уравнение (3.2)] и считая, что коэффициент затухания

$$\delta = \frac{r}{2m}, \quad (6.10)$$

получим идентичное уравнению (6.1) дифференциальное уравнение затухающих колебаний маятника:

$$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = 0.$$

Из выражений (6.1) и (6.5) вытекает, что колебания маятника подчиняются закону

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где частота $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}}$ [см. формулу (6.4)].

Добротность пружинного маятника, согласно уравнениям (6.8) и (6.10)

$$Q = \frac{\sqrt{km}}{r}.$$

6.2. Свободные затухающие колебания в электрическом колебательном контуре

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний заряда в контуре (при $R \neq 0$) имеет вид [см. (4.2)]

$$Q'' + \frac{R}{L}Q' + \frac{1}{LC}Q = 0.$$

Учитывая выражение (4.4) и принимая коэффициент затухания

$$\delta = \frac{R}{2L}, \quad (6.11)$$

дифференциальное уравнение (4.2) можно записать в идентичном уравнению (6.1) виде

$$Q'' + 2\delta Q' + \frac{1}{LC}Q = 0.$$

Из последнего уравнения и выражений (6.1) и (6.5) вытекает, что колебания заряда совершаются по закону

$$Q = Q_m e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.12)$$

с частотой, согласно выражению (6.4):

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}},$$

меньшей собственной частоты контура ω_0 [см. (4.4)]. При $R = 0$ формула (6.13) переходит в формулу (4.4).

Логарифмический декремент затухания определяется формулой (6.7), а добротность колебательного контура [см. (6.8)]

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

В заключение отметим, что при увеличении коэффициента затухания δ период затухающих колебаний растет и при $\delta = \omega_0$ обращается в бесконечность, т. е. движение перестает быть периодическим. В данном случае колеблющаяся величина асимптотически приближается к нулю, когда $t \rightarrow \infty$. Процесс не будет колебательным. Он называется аperiodическим.

§ 7. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (механических и электромагнитных) и его решение

Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие колебания, надо компенсировать потери энергии. Такая компенсация возможна с помощью какого-либо периодически действующего фактора $X(t)$, изменяющегося по гармоническому закону:

$$X(t) = X_0 \cos \omega t.$$

Если рассматривать механические колебания, то роль $X(t)$ играет внешняя вынуждающая сила

$$F = F_0 \cos \omega t. \quad (7.1)$$

С учетом выражения (7.1) закон движения для пружинного маятника (6.9) запишется в виде

$$mx'' = -kx - rx' + F_0 \cos \omega t.$$

Используя (3.2) и (6.10), приходим к уравнению

$$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (7.2)$$

Если рассматривать электрический колебательный контур, то роль $X(t)$ играет подводимая к контуру внешняя периодически изменяющаяся по гармоническому закону ЭДС или переменное напряжение

$$U = U_m \cos \omega t. \quad (7.3)$$

Тогда уравнение (4.2) с учетом уравнения (7.3) можно записать в виде

$$Q'' + \frac{R}{L} Q' + \frac{1}{LC} Q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t.$$

Используя выражения (4.4) и (6.11), приходим к уравнению

$$Q'' + 2\delta Q' + \omega_0^2 Q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t. \quad (7.4)$$

Колебания, возникающие под действием внешней периодически изменяющейся силы или внешней периодически изменяющейся ЭДС, называются **вынужденными механическими** и **вынужденными электромагнитными колебаниями** соответственно.

Уравнения (7.2) и (7.4) можно свести к линейному неоднородному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = x_0 \cos \omega t, \quad (7.5)$$

применяя впоследствии его решение для вынужденных колебаний конкретной физической природы (x_0 в случае механических колебаний равно F_0/m , в случае электромагнитных – U_m/m).

Решение уравнения (7.5) равно сумме общего решения (6.5) однородного уравнения (6.1) и частного решения неоднородного уравнения. Частное решение найдем в комплексной форме (см. § 1). Заменим правую часть уравнения (7.5) на комплексную величину $x_0 e^{i\omega t}$:

$$s'' + 2\delta s' + \omega_0^2 s = x_0 e^{i\omega t}. \quad (7.6)$$

Частное решение этого уравнения будем искать в виде

$$s = s_0 e^{i\eta t}.$$

Подставляя выражение для s и его производных ($s' = i\eta s_0 e^{i\eta t}$, $\dot{s}'' = -\eta^2 s_0 e^{i\eta t}$) в уравнение (7.6), получаем

$$s_0 e^{i\eta t} (-\eta^2 + 2i\delta\eta + \omega_0^2) = x_0 e^{i\omega t}. \quad (7.7)$$

Так как это равенство должно быть справедливым для всех моментов времени, то время t из него должно исключаться. Отсюда следует, что $\eta = \omega$. Учитывая это, из уравнения (7.7) найдем величину s_0 и умножим ее числитель и знаменатель на $(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega)$:

$$s = \frac{x_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\delta\omega} = x_0 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}.$$

Это комплексное число удобно представить в экспоненциальной форме: $s_0 = A e^{i\varphi}$, где

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \quad (7.8)$$

$$\varphi = \arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (7.9)$$

Следовательно, решение уравнения (7.6) в комплексной форме примет вид $s = Ae^{i(\omega t - \varphi)}$. Его вещественная часть, являющаяся решением уравнения (7.5), равна

$$s = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (7.10)$$

где A и φ задаются соответственно формулами (7.8) и (7.9).

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения (7.5) имеет вид

$$s = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (7.11)$$

Решение уравнения (7.5) равно сумме общего решения однородного уравнения

$$s_1 = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (7.12)$$

[см. уравнение (6.5)] и частного решения уравнения (7.11). Слагаемое (7.12) играет существенную роль только в начальной стадии процесса (при установлении колебаний) до тех пор, пока амплитуда вынужденных колебаний не достигнет значения, определяемого равенством (7.8). Графически вынужденные колебания представлены на рис. 12. Следовательно, в установившемся режиме вынужденные колебания происходят с частотой ω и являются гармоническими; амплитуда и фаза колебаний, определяемые выражениями (7.8) и (7.9), также зависят от ω .

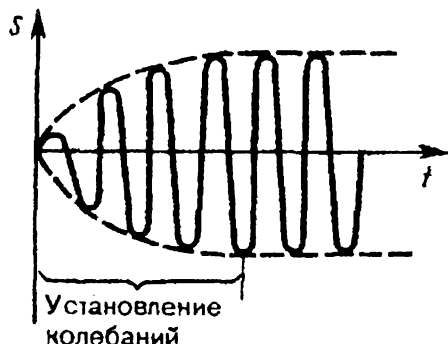


Рис. 12

Запишем формулы (7.10), (7.8) и (7.9) для электромагнитных колебаний, учитывая, что $\omega_0^2 = 1/(LC)$ [см. формулу (4.4)] и $\delta = R/(2L)$ [см. формулу (6.11)]:

$$Q_m = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad \text{tg } \alpha = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}. \quad (7.13)$$

напряжение цепи.

Продифференцировав $Q = Q_m \cos(\omega t - \alpha)$ по t , найдем силу тока в контуре при установившихся колебаниях:

$$I = -\omega Q_m \sin(\omega t - \alpha) = I_m \cos(\omega t - \alpha + \pi/2), \quad (7.14)$$

где

$$I_m = \omega Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (7.15)$$

*$x_L = \omega L$ индукт. сопротивл.
 $x_C = \frac{1}{\omega C}$ емкост. сопротивл.*

Выражение (7.14) может быть записано в виде $I = I_m \cos(\omega t - \varphi)$, где $\varphi = \alpha - \pi/2$ – сдвиг по фазе между током и приложенным напряжением [см. формулу (7.3)]. В соответствии с выражением (7.13)

$$\text{tg } \varphi = \text{tg}(\alpha - \pi/2) = -\frac{1}{\text{tg } \alpha} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (7.16)$$

Из формулы (7.16) вытекает, что ток отстает по фазе от напряжения ($\varphi > 0$), если $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, и опережает напряжение ($\varphi < 0$), если $\omega L < \frac{1}{\omega C}$.

Формулы (7.15) и (7.16) можно также получить с помощью векторной диаграммы.

§ 8. Резонанс

Рассмотрим зависимость амплитуды A вынужденных колебаний от частоты ω . Механические и электромагнитные колебания будем рассматривать одновременно, называя колеблющуюся величину либо смещением (x) колеблющегося тела из положения равновесия, либо зарядом (Q) конденсатора.

Из формулы (7.8) следует, что амплитуда A смещения (заряда) имеет максимум. Чтобы определить **резонансную частоту** $\omega_{\text{рез}}$ – частоту, при которой амплитуда A смещения (заряда) вынужденных колебаний достигает максимума, – нужно найти максимум функции (7.8), или, что то же самое, минимум подкоренного выражения. Продифференцировав подкоренное выражение по ω и приравняв его нулю, получим условие, определяющее $\omega_{\text{рез}}$:

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\delta^2\omega = 0.$$

Это равенство выполняется при $\omega = 0, \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$, у которых только лишь положительное значение имеет физический смысл. Следовательно, резонансная частота

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (8.1)$$

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы (частоты вынуждающего переменного напряжения) к частоте, равной или близкой собственной частоте колебательной системы, называется **резонансом (соответственно механическим или электрическим)**. При $\delta^2 \ll \omega_0^2$ значение $\omega_{\text{рез}}$ практически совпадает с собственной частотой ω_0 колебательной системы. Подставляя выражение (8.1) в формулу (7.8), получим

$$A_{\text{рез}} = \frac{x_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (8.2)$$

На рис. 13 приведены зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты при различных значениях δ . Из уравнений (8.1) и (8.2) вытекает, что чем меньше δ , тем выше и правее лежит максимум данной кривой. Если $\omega \rightarrow 0$, то все кривые [см. также формулу (7.8)] достигают одного и того же, отличного от нуля, предельного значения x_0/ω_0^2 , которое называют статическим отклонением. В случае механических колебаний $x_0/\omega_0^2 = F_0/(m\omega_0^2)$, в случае электромагнитных – $x_0/\omega_0^2 = U_m/(L\omega_0^2)$. Если $\omega \rightarrow \infty$, то все кривые асимптотически стремятся к нулю. Приведенная совокупность кривых называется резонансными кривыми.

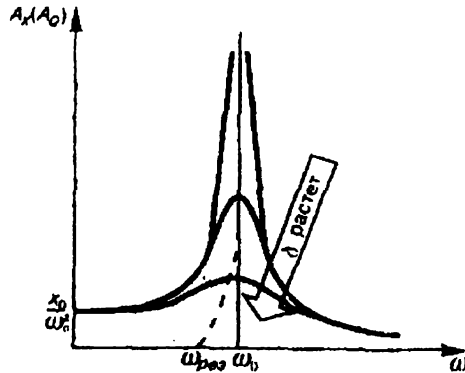


Рис. 13

Из формулы (8.2) вытекает, что при малом затухании ($\delta^2 \ll \omega_0^2$) резонансная амплитуда смещения (заряда)

$$A_{\text{рез}} = \frac{x_0}{2\delta\omega_0} = \frac{\omega_0}{2\delta} \frac{x_0}{\omega_0^2} = Q \frac{x_0}{\omega_0^2},$$

где Q – добротность колебательной системы [см. формулу (6.8)], x_0/ω_0^2 – рассмотренное выше статическое отклонение. Отсюда следует, что добротность Q характеризует резонансные свойства колебательной системы: чем больше Q , тем больше $A_{\text{рез}}$.

На рис. 14 представлены резонансные кривые для амплитуды скорости (тока). Амплитуда скорости (тока)

$$\omega A = \frac{x_0 \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} = \frac{x_0}{\sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2} + 4\delta^2}}$$

максимальна при $\omega_{\text{рез}} = \omega_0$ и равна $x_0/(2\delta)$, т. е. чем больше коэффициент затухания δ , тем ниже максимум резонансной кривой. Используя формулы (3.2), (6.10) и (4.4), (6.11), получим, что амплитуда скорости при механическом резонансе равна $(A_v)_{\text{max}} = x_0/(2\delta) = F_0/r$, а амплитуда тока при электрическом резонансе $(A_I)_{\text{max}} = x_0/(2\delta) = U_m/R$.

Из выражения $\text{tg } \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ [см. формулу (7.9)] следует, что если за-

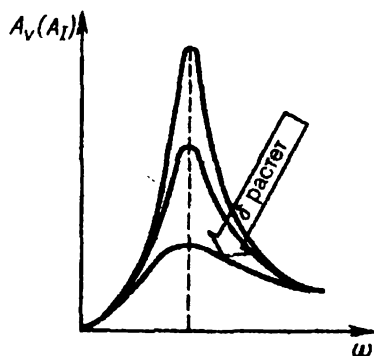


Рис. 14

тухание в системе отсутствует ($\delta = 0$), то только в этом случае колебания и вынуждающая сила (приложенное переменное напряжение) имеют одинаковые фазы; во всех других случаях $\varphi \neq 0$.

Зависимость φ от ω при разных коэффициентах δ графически представлена на рис. 15, из которого следует, что при изменении ω изменяется и сдвиг фаз φ . Из формулы (7.9) вытекает, что при $\omega = 0$ $\varphi = 0$, а при $\omega = \omega_0$ независимо от значения коэффициента затухания $\varphi = \pi/2$, т. е. сила (напряжение) опережает по фазе колебания на $\pi/2$. При дальнейшем

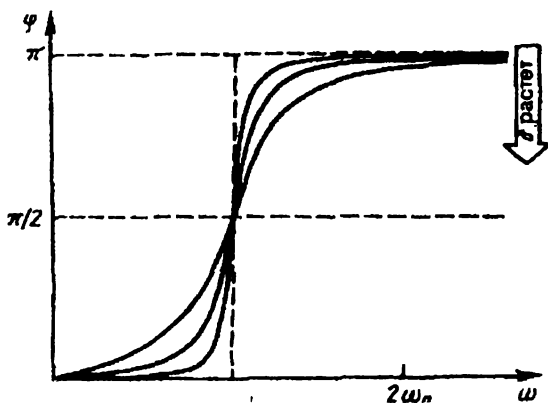


Рис. 15

увеличении ω сдвиг фаз возрастает и при $\omega \square \omega_0$ $\varphi \rightarrow \pi$, т. е. фаза колебаний почти противоположна фазе внешней силы (переменного напряжения). Семейство кривых, изображенных на рис. 15, называется фазовыми резонансными кривыми.

Явления резонанса могут быть как вредными, так и полезными. Например, при конструировании машин и различного рода сооружений необходимо, чтобы собственная частота колебаний их не совпадала с частотой возможных внешних воздействий, в противном случае возникнут вибрации, которые могут вызвать серьезные разрушения. С другой стороны, наличие резонанса позволяет обнаружить даже очень слабые колебания, если их частота совпадает с частотой собственных колебаний прибора. Так, радиотехника, прикладная акустика, электротехника используют явление резонанса.

§ 9. Автоколебания

Огромный интерес для техники представляет возможность поддерживать колебания незатухающими. Для этого необходимо восполнять потери энергии реальной колебательной системы. Особенно важны и широко применимы так называемые **автоколебания** – незатухающие колебания, поддерживаемые в диссипативной системе за счет постоянного внешнего источника энергии, причем свойства этих колебаний определяются самой системой.

Автоколебания принципиально отличаются от свободных незатухающих колебаний тем, что во-первых, они не затухают с течением времени и, во-вторых, их амплитуда не зависит от начального кратковременного воздействия («толчка»), которое возбуждает колебания. Автоколебания отличаются также и от вынужденных колебаний (см. § 7), происходящих под действием периодической силы. В то время как частота вынужденных колебаний совпадает с частотой внешней силы, а амплитуда колебаний зависит от амплитуды этой силы, частота и амплитуда автоколебаний определяются свойствами самой системы. Автоколебательная система сама управляет внешними воздействиями, обеспечивая согласованность поступления энергии определенными порциями в нужный момент времени (в такт с ее колебаниями).

Выделим основные элементы, характерные для многих автоколебательных систем (рис. 16):

- 1) источник энергии, за счет которого поддерживаются незатухающие колебания;
- 2) устройство, регулирующее поступление энергии от источника, – «клапан»;

3) колебательная система, т. е. та часть автоколебательной системы, в которой непосредственно происходят колебания;

4) обратная связь, с помощью которой колебательная система управляет «клапаном».

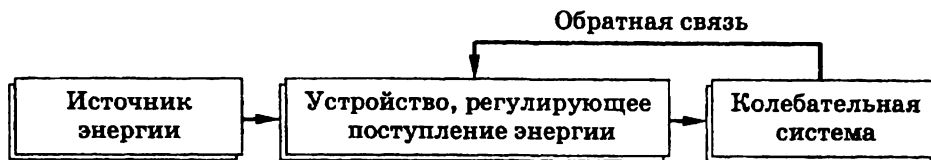


Рис. 16

Примером автоколебательной системы могут служить часы. Храповой механизм подталкивает маятник в такт с его колебаниями. Энергия, передаваемая при этом маятнику, берется либо за счет раскручивающейся пружины, либо за счет опускающегося груза. Колебания воздуха в духовых инструментах и органных трубах также возникают вследствие автоколебаний, поддерживаемых воздушной струей.

Автоколебательными системами являются двигатели внутреннего сгорания, паровые турбины, ламповый генератор и т. д.

§ 10. Переменный ток

Установившиеся вынужденные электромагнитные колебания (см. § 7) можно рассматривать как протекание в цепи, содержащей резистор, катушку индуктивности и конденсатор, переменного тока. Переменный ток можно считать квазистационарным, т. е. для него мгновенные значения силы тока во всех сечениях цепи практически одинаковы, так как их изменения происходят достаточно медленно, а электромагнитные возмущения распространяются по цепи со скоростью, равной скорости света. Для мгновенных значений квазистационарных токов выполняются закон Ома [Г. Ом – немецкий физик (1787–1854)] и вытекающие из него правила Кирхгофа [Г.О. Кирхгоф – немецкий физик (1824–1887)].

Рассмотрим последовательно процессы, происходящие на участке цепи, содержащем резистор, катушку индуктивности и конденсатор, к концам которого приложено переменное напряжение

$$U = U_m \cos \omega_0 t, \quad (10.1)$$

где U_m – амплитуда напряжения.

10.1. Процессы, происходящие на участке цепи, содержащем резистор

Рассмотрим переменный ток, текущий через резистор сопротивлением R ($L \rightarrow 0$, $C \rightarrow 0$) (рис. 17,а). При выполнении условия квазистационарности сила тока через резистор определяется законом Ома:

$$I = U/R = (U_m/R) \cos \omega_0 t = I_m \cos \omega_0 t,$$

где амплитуда силы тока $I_m = U_m/R$.

Для наглядного изображения соотношений между переменными токами и напряжениями воспользуемся методом векторных диаграмм. На рис. 17, б дана векторная диаграмма амплитудных значений тока I_m и напряжения U_m на резисторе (сдвиг фаз между I_m и U_m равен нулю).

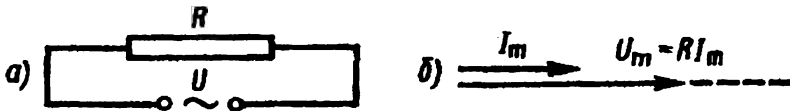


Рис. 17

10.2. Процессы, происходящие на участке цепи, содержащем катушку индуктивности

Рассмотрим переменный ток, текущий через катушку индуктивностью L ($R \rightarrow 0$, $C \rightarrow 0$) (рис. 18,а). Если в цепи приложено переменное напряжение (10.1), то в ней потечет переменный ток, в результате чего возникнет

ЭДС самоиндукции $\xi_s = -L \frac{dl}{dt}$. Тогда закон Ома для рассматриваемого участка цепи имеет вид $U_m \cos \omega t - L \frac{dl}{dt} = 0$, откуда

$$L \frac{dl}{dt} = U_m \cos \omega t. \quad (10.2)$$

Так как внешнее напряжение приложено к катушке индуктивности, то

$$U_L = L \frac{dl}{dt} \quad (10.3)$$

есть падение напряжения на катушке. Из уравнения (10.2) следует, что

$di = \frac{U_m}{L} \cos \omega t dt$; после интегрирования, учитывая, что постоянная интегрирования равна нулю (так как отсутствует постоянная составляющая тока), получим

$$I = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t = \frac{U_m}{\omega L} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = I_m \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad (10.4)$$

где $I_m = \frac{U_m}{\omega L}$. Величина

$$R_L = \omega L \quad (10.5)$$

называется реактивным индуктивным сопротивлением (или индуктивным сопротивлением). Из выражения (10.5) вытекает, что для постоянного тока ($\omega = 0$) катушка индуктивности не имеет сопротивления. Подстановка значения $U_m = \omega L I_m$ в выражение (10.2) с учетом уравнения (10.3) приводит к следующему значению падения напряжения на катушке индуктивности:

$$U_L = \omega L I_m \cos \omega t. \quad (10.6)$$

Сравнение выражений (10.4) и (10.6) показывает, что падение напряжения U_L опережает по фазе ток I , текущий через катушку, на $\pi/2$, что и изображено на векторной диаграмме (рис. 18, б).

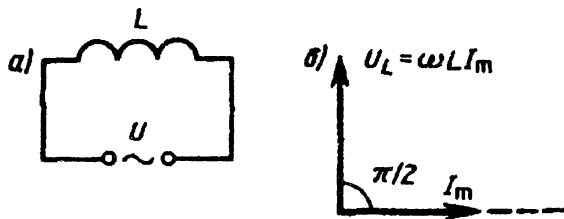


Рис. 18

10.3. Процессы, происходящие на участке цепи, содержащем конденсатор

Рассмотрим переменный ток, текущий через конденсатор емкостью C ($R \rightarrow 0$, $L \rightarrow 0$) (рис. 19, а). Если переменное напряжение (10.1) прило-

жено к конденсатору, то он все время перезаряжается, и в цепи течет переменный ток. Так как все внешнее напряжение приложено к конденсатору, а сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь, то

$$\frac{Q}{C} = U_c = U_m \cos \omega t. \text{ Сила тока}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega C U_m \sin \omega t = I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (10.7)$$

где

$$I_m = \omega C U_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}}.$$

Величина

$$R_c = \frac{1}{\omega C}$$

называется реактивным емкостным сопротивлением (или емкостным сопротивлением). Для постоянного тока ($\omega = 0$) $R_c = \infty$, т.е. постоянный ток через конденсатор течь не может. Падение напряжения на конденсаторе

$$U_c = \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t. \quad (10.8)$$

Сравнение выражений (10.7) и (10.8) приводит к выводу, что падение напряжения U_c отстает по фазе от текущего через конденсатор тока I на $\pi/2$. Это показано на векторной диаграмме (рис. 19, б).

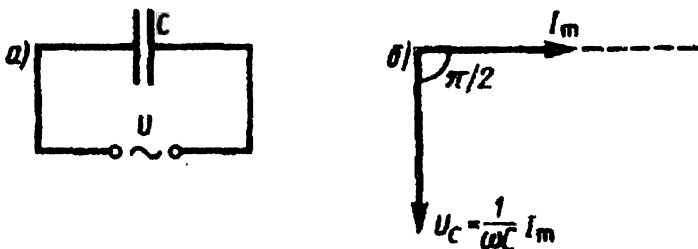


Рис. 19

10.4. Цепь переменного тока, содержащая последовательно включенные резистор, катушку индуктивности и конденсатор

Участок цепи, содержащий резистор сопротивлением R , катушку индуктивностью L и конденсатор емкостью C , к концам которого приложено переменное напряжение (10.1) представлен на рис. 20, а. В цепи возникнет переменный ток, который вызовет на всех элементах цепи соответствующие падения напряжения U_R , U_L , и U_C . На рис. 20, б представлена векторная диаграмма амплитуд падений напряжений на резисторе U_R , катушке U_L в конденсаторе U_C . Амплитуда U_m приложенного напряжения должна быть равна векторной сумме амплитуд этих падений напряжений. Как видно из рис. 20, б, угол φ определяет разность фаз между напряжением и силой тока. Из рисунка следует, что [см. также формулу (7.16)]

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (10.9)$$

Из прямоугольного треугольника получаем

$$(RI_m)^2 + \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m \right]^2 = U_m^2,$$

откуда амплитуда силы тока имеет значение

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right]^2}}, \quad (10.10)$$

совпадающее с формулой (7.15).

Следовательно, если напряжение в цепи изменяется по закону $U = U_m \cos \omega_0 t$, то в цепи течет ток

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (10.11)$$

где φ и I_m определяются соответственно формулами (10.9) и (10.10). Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right]^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} \quad (10.12)$$

называется полным сопротивлением цепи, а величина

$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} \text{ — реактивным сопротивлением.}$$

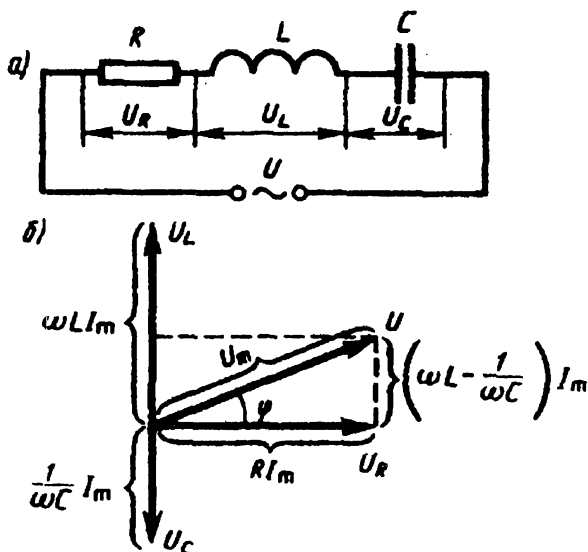


Рис. 20

Рассмотрим частный случай, когда в цепи отсутствует конденсатор. В данном случае падения напряжений U_R и U_L в сумме равны приложенному напряжению U . Векторная диаграмма для данного случая представлена на рис. 21, из которого следует, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}, \quad I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}.$$

Выражения (10.9) в (10.10) совпадают с выражением (10.13), если в них $R_C = 1/(\omega C) = 0$, т. е. $C = \infty$. Следовательно, отсутствие конденсатора в цепи означает $C = \infty$, а не $C = 0$. Данный вывод можно трактовать следующим образом: сближая обкладки конденсатора до их полного соприкосновения, получим цепь, в которой конденсатор отсутствует (расстояние между обкладками стремится к нулю, а емкость — к бесконечности).

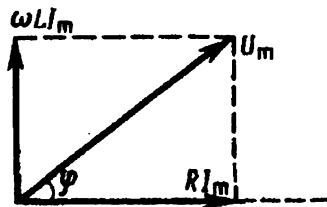


Рис. 21

Если в цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные конденсатор, катушку индуктивности и резистор (см. рис. 22)

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \quad (10.13)$$

то угол сдвига фаз между током и напряжением (10.9) обращается в нуль ($\varphi = 0$), т. е. изменения тока и напряжения происходят синфазно. Условию (10.13) удовлетворяет частота

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (10.14)$$

В данном случае полное сопротивление цепи Z (10.12) становится минимальным, равным активному сопротивлению R цепи, и ток в цепи определяется этим сопротивлением, принимая максимальные (возможные при данном U_m) значения. При этом падение напряжения на активном сопротивлении равно внешнему напряжению, приложенному к цепи ($U_R = U$), а падения напряжений на конденсаторе (U_C) и катушке индуктивности (U_L) одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Это явление называется резонансом напряжений (последовательным резонансом), а частота (10.14) – резонансной частотой. Векторная диаграмма для резонанса напряжений приведена на рис. 22, а зависимость амплитуды силы тока от ω приводилась выше (см. рис. 14). В случае резонанса напряжений

$$(U_L)_{\text{рез}} = (U_C)_{\text{рез}},$$

подставив в эту формулу значения резонансной частоты и амплитуды напряжений на катушке индуктивности и конденсаторе, получим

$$(U_L)_{\text{рез}} = (U_C)_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_m = Q U_m,$$

где Q – добротность контура, определяемая выражением (6.14). Так как добротность обычных колебательных контуров больше единицы, то напряжение как на катушке индуктивности, так и на конденсаторе превышает напряжение, приложенное к цепи. Поэтому явление резонанса напряжений используется в технике для усиления колебания напряжения какой-либо определенной частоты. Например, в случае резонанса на конденсаторе можно получить напряжение с амплитудой QU_m (Q в данном случае – добротность контура, которая может быть значительно больше U_m). Это усиление напряжения возможно только для узкого интервала частот вблизи резонансной частоты контура, что позволяет выделить из многих сигналов одно колебание определенной частоты, т. е. на радиоприемнике настроить на нужную длину волны. Явление резонанса напряжений необходимо учитывать при расчете изоляции электрических линий, содержащих конденсаторы и катушки индуктивности, так как иначе может наблюдаться их пробой.

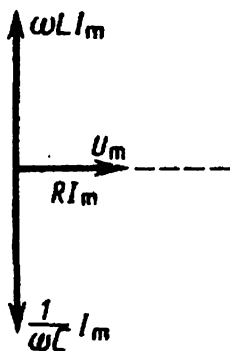


Рис. 22

10.5. Цепь переменного тока, содержащая параллельно включенные катушку индуктивности и конденсатор

Рассмотрим цепь переменного тока, содержащую параллельно включенные конденсатор емкостью C и катушку индуктивностью L (рис. 23). Для простоты допустим, что активное сопротивление обеих ветвей настолько мало, что им можно пренебречь. Если приложенное напряжение изменяется по закону $U = U_m \cos \omega_0 t$ [см. уравнение (10.1)], то, согласно формуле

(10.11), в ветви 1C2 течет ток $I_1 = I_{m1} \cos(\omega t - \varphi_1)$, амплитуда которого определяется из выражения (10.10) при условии $R = 0$ и $L = 0$: $I_{m1} = \frac{U_m}{1/\omega C}$. Начальная фаза φ_1 этого тока по формуле (10.9) определяется равенством

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\infty, \varphi_1 = (2n + 3/2)\pi, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.15)$$

Аналогично, сила тока в ветви 1L2 $I_2 = I_{m2} \cos(\omega t - \varphi_2)$, амплитуда которого определяется из (10.10) при условии $R = 0$ и $C = \infty$ (условие отсутствия емкости в цепи, см. п. 10.4): $I_{m2} = \frac{U_m}{\omega L}$. Начальная фаза φ_2 этого тока [см. (10.9)]

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = +\infty, \varphi_2 = (2n + 1/2)\pi, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.16)$$

Из сравнения выражений (10.15) и (10.16) вытекает, что разность фаз токов в ветвях 1C2 и 1L2 равна $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$, т. е. токи в ветвях противоположны по фазе. Амплитуда силы тока во внешней (неразветвленной) цепи

$$I_m = |I_{m1} - I_{m2}| = U_m \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right|.$$

Если $\omega = \omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, то $I_{m1} = I_{m2}$ и $I_m = 0$. Явление резкого уменьшения амплитуды силы тока во внешней цепи, питающей параллельно включенные конденсатор и катушку индуктивности, при приближении частоты ω приложенного напряжения к резонансной частоте $\omega_{\text{рез}}$, называется резонансом токов (параллельным резонансом). В данном случае для резонансной частоты получили такое же значение, как и при резонансе напряжений (см. п. 10.4).

Амплитуда силы тока I_m оказалась равна нулю потому, что активным сопротивлением контура пренебрегли. Если учесть сопротивление R , то разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ не будет равна π , поэтому при резонансе токов амплитуда силы тока I_m будет отлична от нуля, но примет наименьшее возможное значение. Таким образом, при резонансе токов во внешней цепи токи I_1 и I_2 компенсируются и сила тока I в подводящих проводах достига-

ет минимального значения, обусловленного только током через резистор. При резонансе токов силы токов I_1 и I_2 могут значительно превышать силу тока I .

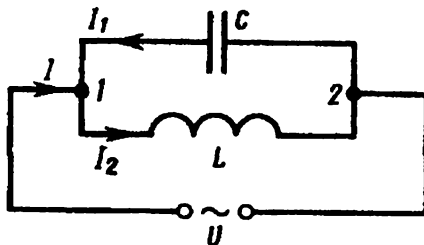


Рис. 23

Рассмотренный контур оказывает большое сопротивление переменному току с частотой, близкой к резонансной. Поэтому это свойство резонанса токов используется в резонансных усилителях, позволяющих выделять одно определенное колебание из сигнала сложной формы. Кроме того, резонанс токов используется в индукционных печах, где нагревание металлов производится вихревыми токами. В них емкость конденсатора, включенного параллельно нагревательной катушке, подбирается так, чтобы при частоте генератора получился резонанс токов, в результате чего сила тока через нагревательную катушку будет гораздо больше, чем сила тока в подводящих проводах.

§ 11. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока

Мгновенное значение мощности переменного тока равно произведению мгновенных значений напряжения и силы тока:

$$P(t) = U(t)I(t),$$

где $U = U_m \cos \omega t$, $I = I_m \cos(\omega t - \varphi)$ [см. выражения (10.1) и (10.11)]. Раскрыв $\cos(\omega t - \varphi)$, получим

$$P(t) = I_m U_m \cos(\omega t - \varphi) \cos \omega t = I_m U_m (\cos^2 \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi).$$

Практический интерес представляет не мгновенное значение мощности, а ее среднее значение за период колебания. Учитывая, что $\langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$, $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$, получим

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2I_m U_m \cos \varphi}. \quad (11.1)$$

Из векторной диаграммы (см. рис. 20) следует, что $U_m \cos \varphi = I_m R$. По этому $\langle P \rangle = \frac{1}{2I_m R}$. Такую же мощность развивает постоянный ток $I = I_m / \sqrt{2}$.

Величины $I = I_m / \sqrt{2}$, $U = U_m / \sqrt{2}$ называются действующими (или эффективными) значениями тока и напряжения соответственно. Все амперметры и вольтметры градуируются по действующим значениям тока и напряжения.

Учитывая действующие значения тока и напряжения, выражение средней мощности (11.1) можно записать в виде

$$\langle P \rangle = IU \cos \varphi, \quad (11.2)$$

где множитель $\cos \varphi$ называется коэффициентом мощности.

Формула (11.2) показывает, что мощность, выделяемая в цепи переменного тока I , в общем случае зависит не только от силы тока и напряжения, но и от сдвига фаз между ними. Если в цепи реактивное сопротивление отсутствует, то $\cos \varphi = 1$ и $\langle P \rangle = IU$. Если цепь содержит только реактивное сопротивление ($R = 0$), то $\cos \varphi = 0$ и средняя мощность равна нулю, какими бы большими ни были ток и напряжение. Если $\cos \varphi$ имеет значения, существенно меньшие единицы, то для передачи заданной мощности при данном напряжении генератора нужно увеличивать силу тока I , что приведет либо к выделению джоулевой теплоты, либо потребует увеличения сечения проводов, что повышает стоимость линий электропередачи. Поэтому на практике всегда стремятся увеличить $\cos \varphi$, наименьшее допустимое значение которого для промышленных установок составляет примерно 0,85.

ГЛАВА 2. УПРУГИЕ ВОЛНЫ

§ 12. Волновые процессы. Продольные и поперечные волны

Колебания, возбужденные в какой-либо точке среды (твердой, жидкой или газообразной), распространяются в ней с конечной скоростью, зависящей от свойств среды, передаваясь от одной точки среды к другой. Чем дальше расположена частица среды от источника колебаний, тем позднее она начнет колебаться. Иначе говоря, фазы колебаний частиц среды и источника тем больше отличаются друг от друга, чем больше это расстояние. При изучении распространения колебаний не учитывается дискретное (молекулярное) строение среды и среда рассматривается как сплошная, т. е. непрерывно распределенная в пространстве и обладающая упругими свойствами.

Процесс распространения колебаний в сплошной среде называется **волновым процессом** (или волной). При распространении волны частицы среды не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия. Вместе с волной от частицы к частице среды передаются лишь состояние колебательного движения и его энергия. Поэтому основным свойством всех волн, независимо от их природы, является перенос энергии без переноса вещества.

Среди разнообразных волн, встречающихся в природе и технике, выделяются следующие их типы: волны – поверхности жидкости, упругие и электромагнитные волны. Упругими (или механическими) волнами называются механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде. Упругие волны бывают продольные и поперечные. В **продольных волнах** частицы среды колеблются в направлении распространения волны, в **поперечных** – в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны.

Продольные волны могут возбуждаться в средах, в которых возникают упругие силы при деформации сжатия и растяжения, т. е. твердых, жидких и газообразных телах. Поперечные волны могут возбуждаться в среде, в которой возникают упругие силы при деформации сдвига, т. е. в твердых телах; в жидкостях и газах возникают только продольные волны, а в твердых телах – как продольные, так и поперечные.

Упругая волна называется гармонической, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими. На рис. 24 представлена гармоническая поперечная волна, распространяющаяся со скоростью v вдоль оси x , т. е. приведена зависимость между смещением ξ частиц среды, участвующих в волновом процессе, и расстоянием x этих частиц (например, частицы B) от источника колебаний O для какого-то фиксиро-

рованного момента времени t . Приведенный график функции $\xi(x, t)$ похож на график гармонического колебания, однако они различны по существу. График волны дает зависимость смещения всех частиц среды от расстояния до источника колебаний в данный момент времени, а график колебаний – зависимость смещения данной частицы от времени.

Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется **длиной волны** λ (см. рис. 24). Длина волны равна тому расстоянию, на которое распространяется определенная фаза колебания за период, т. е.

$$\lambda = vT,$$

или, учитывая, что $T = 1/\nu$, где ν – частота колебаний,

$$v = \lambda \nu.$$

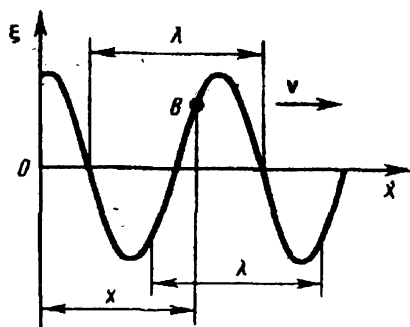


Рис. 24

Если рассмотреть волновой процесс подробнее, то ясно, что колеблются не только частицы, расположенные вдоль оси x , а колеблется совокупность частиц, расположенных в некотором объеме, т. е. волна, распространяясь от источника колебаний, охватывает все новые и новые области пространства. Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t , называется **волновым фронтом**. Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется **волновой поверхностью**. Волновых поверхностей можно провести бесчисленное множество, а волновой фронт в каждый момент времени – один. Волновой фронт также является волновой поверхностью. Волновые поверхности могут быть любой формы, а в простейшем случае они представляют собой совокупность плоскостей, параллельных друг другу, или совокупность кон-

центрических сфер. Соответственно волна называется плоской или сферической.

§ 13. Уравнение бегущей волны. Фазовая скорость. Волновое уравнение

Бегущими волнами называются волны, которые переносят в пространстве энергию. Перенос энергии волнами количественно характеризуется вектором плотности потока энергии. Этот вектор для упругих волн называется вектором Умова [Н. А. Умов – русский ученый, решивший задачу о распространении энергии в среде (1846–1915)]. Направление вектора Умова совпадает с направлением переноса энергии, а его модуль равен энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны.

Для вывода **уравнения бегущей волны** – зависимости смещения колеблющейся частицы от координат и времени – рассмотрим плоскую волну, предполагая, что колебания носят гармонический характер, а ось x совпадает с направлением распространения волны (см. рис. 24). В данном случае волновые поверхности перпендикулярны оси x , а так как все точки волновой поверхности колеблются одинаково, то смещение ξ будет зависеть только от x и t , т. е. $\xi = \xi(x, t)$.

Рассмотрим некоторую частицу B среды, находящуюся от источника колебаний O на расстоянии x (см. рис. 24). Если колебания точек, лежащих в плоскости $x = 0$, описываются функцией $\xi(0, t) = A \cos \omega t$, то частица B среды колеблется по тому же закону, но ее колебания будут отставать по времени от колебаний источника на τ , так как для прохождения волной расстояния x требуется время $\tau = x/v$, где v – скорость распространения волн. Тогда уравнение колебаний частиц, лежащих в плоскости x , имеет вид

$$\xi(x, t) = A \cos \omega(t - x/v), \quad (13.1)$$

откуда следует, что $\xi(x, t)$ является не только периодической функцией времени, но и периодической функцией координаты x . Уравнение (13.1) есть уравнение бегущей волны. Если плоская волна распространяется в противоположном направлении, то

$$\xi(x, t) = A \cos \omega(t + x/v).$$

В общем случае уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x в среде, не поглощающей энергию, имеет вид

$$\xi(x, t) = A \cos[\omega(t - x/v) + \varphi_0], \quad (13.2)$$

где $A = \text{const}$ – амплитуда волны, ω – циклическая частота, φ_0 – начальная фаза волны, определяемая в общем случае выбором начал отсчета x и t , $[\omega(t - x/v) + \varphi_0]$ – фаза плоской волны.

Для характеристики волн используется **волновое число** – физическая величина, которая показывает, сколько длин волн укладывается на отрезке длиной 2π :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}. \quad (13.3)$$

Учитывая выражение (13.3), уравнению (13.2) можно придать вид

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (13.4)$$

Уравнение волны, распространяющейся вдоль отрицательного направления оси x , отличается от уравнения (13.4) только знаком члена kx .

Основываясь на формуле Эйлера (1.7), уравнение плоской волны можно записать в виде

$$\xi(x, t) = A^{i(\omega t - kx + \varphi_0)},$$

где физический смысл имеет лишь действительная часть (см. § 1).

Предположим, что при волновом процессе фаза постоянна, т. е.

$$\omega(t - x/v) + \varphi_0 = \text{const}. \quad (13.5)$$

Продифференцировав выражение (13.5) и сократив на ω , получим

$$dt - \frac{1}{v} dx = 0, \text{ откуда}$$

$$\frac{dx}{dt} = v. \quad (13.6)$$

Следовательно, скорость v распространения волны в уравнении (13.6) есть не что иное, как скорость перемещения фазы волны, и ее называют **фазовой скоростью**.

Повторяя ход рассуждений для плоской волны, можно доказать, что

уравнение сферической волны, волновые поверхности которой имеют вид концентрических сфер, записывается как

$$\xi(r, t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0), \quad (13.7)$$

где r – расстояние от центра волны до рассматриваемой точки среды. В случае сферической волны даже в среде, не поглощающей энергию, амплитуда колебаний не остается постоянной, а убывает с расстоянием по закону $1/r$. Уравнение (13.7) справедливо лишь для r , значительно превышающих размеры источника (тогда источник колебаний можно считать точечным).

Из выражения (13.3) вытекает, что фазовая скорость

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (13.8)$$

Если фазовая скорость волн в среде зависит от их частоты, то это явление называют **дисперсией волн**, а среда, в которой наблюдается дисперсия волн, называется диспергирующей средой.

Распространение волн в однородной изотропной среде в общем случае описывается волновым уравнением – дифференциальным уравнением в частных производных

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (13.9)$$

где v – фазовая скорость. Решением уравнения (13.9) является уравнение любой волны. Соответствующей подстановкой можно убедиться, что уравнению (13.9) удовлетворяют, в частности, плоская волна [см. уравнение (13.2)] и сферическая волна [см. уравнение (13.7)]. Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси x , волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

§ 14. Принцип суперпозиции. Групповая скорость

Если среда, в которой распространяется одновременно несколько волн, линейна, т. е. ее свойства не изменяются под действием возмущений, создаваемых волной, то к ним применим **принцип суперпозиции (наложения) волн**: при распространении в линейной среде нескольких волн каж-

дая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды в любой момент времени равно геометрической сумме смещений, которые получают частицы, участвуя в каждом из слагающих волновых процессов.

Исходя из принципа суперпозиции и разложения Фурье [см. формулу (5.5)] любая волна может быть представлена в виде суммы гармонических волн, т. е. в виде волнового пакета, или группы волн. Волновым пакетом называется суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, занимающая в каждый момент времени ограниченную область пространства.

«Сконструируем» простейший волновой пакет из двух распространяющихся вдоль положительного направления оси x гармонических волн с одинаковыми амплитудами, близкими частотами и волновыми числами, причем $d\omega \ll \omega$ и $dk \ll k$. Тогда

$$\begin{aligned}\xi &= A_0 \cos(\omega t - kx) + A_0 \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x] = \\ &= 2A_0 \cos\left(\frac{td\omega - xdk}{2}\right) \cos(\omega t - kx).\end{aligned}$$

Эта волна отличается от гармонической тем, что ее амплитуда

$$A = \left| 2A_0 \cos\left(\frac{td\omega - xdk}{2}\right) \right|$$

есть медленно изменяющаяся функция координаты x и времени t .

За скорость распространения этой негармонической волны (волнового пакета) принимают скорость перемещения максимума амплитуды волны, рассматривая тем самым максимум в качестве центра волнового пакета. При условии, что $td\omega - xdk = \text{const}$, получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} = u. \quad (14.1)$$

Скорость u есть **групповая скорость** – скорость движения группы волн, образующих в каждый момент времени локализованный в пространстве волновой пакет. Выражение (14.1) получено для волнового пакета из двух составляющих, однако можно доказать, что оно справедливо в самом общем случае.

Рассмотрим связь между групповой $u = \frac{d\omega}{dk}$ [см. уравнение (14.1)] и

фазовой $v = \frac{\omega}{k}$ [см. уравнение (13.8)] скоростями. Учитывая, что $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ [см. уравнение (13.3)], получим

$$\begin{aligned} u &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v + k \left(\frac{dv}{d\lambda} : \frac{dk}{d\lambda} \right) = \\ &= v + k \left[\frac{dv}{d\lambda} : \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \right] = v + k \left(-\frac{\lambda^2}{2\pi} \right) \frac{dv}{d\lambda}, \end{aligned}$$

или

$$u = v - \frac{dv}{d\lambda}. \quad (14.2)$$

Из формулы (14.2) вытекает, что u может быть как меньше, так и больше v в зависимости от знака $\frac{dv}{d\lambda}$. В недиспергирующей среде $\frac{dv}{d\lambda} = 0$ и групповая скорость совпадает с фазовой.

Понятие групповой скорости очень важно, так как именно она фигурирует при измерении дальности в радиолокации, в системах управления космическими объектами и т. д. В теории относительности доказывается, что групповая скорость $u \leq c$, в то время как для фазовой скорости ограничений не существует.

§ 15. Интерференция волн

Согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов связывают с понятием когерентности. **Когерентными** называются волны одинаковой частоты, разность фаз которых остается постоянной во времени. При наложении в пространстве двух (или нескольких) когерентных волн в разных его точках получается усиление или ослабление результирующей волны в зависимости от соотношения между фазами этих волн. Это явление называется **интерференцией волн**.

Рассмотрим наложение двух когерентных сферических волн, возбуждаемых точечными источниками S_1 и S_2 (рис. 25), колеблющимися с одинаковыми амплитудой A_0 , частотой ω и постоянной разностью фаз. Согласно уравнению (13.7),

$$\xi_1 = \frac{A_0}{r_1} \cos(\omega t - kr_1 + \varphi_1), \quad \xi_2 = \frac{A_0}{r_2} \cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2),$$

где r_1 и r_2 – расстояния от источников волн до рассматриваемой точки B ; k – волновое число, φ_1 и φ_2 – начальные фазы обеих накладывающихся сферических волн. Амплитуда результирующей волны в точке B согласно уравнению (5.2) равна

$$A^2 = A_0^2 \left\{ \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2} \cos[k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2)] \right\}.$$

Так как для когерентных источников разность начальных фаз $\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$, то результат наложения двух волн в различных точках зависит от величины $\Delta = r_1 - r_2$, называемой разностью хода волн.

В точках, где

$$k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pm 2m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (15.1)$$

наблюдается интерференционный максимум: амплитуда результирующего колебания $A = A_0/r_1 + A_0/r_2$. В точках, где

$$k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pm(2m + 1)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (15.2)$$

наблюдается интерференционный минимум: амплитуда результирующего колебания $A = |A_0/r_1 + A_0/r_2|$; $m = 0, 1, 2, \dots$, называется соответственно порядком интерференционного максимума или минимума.

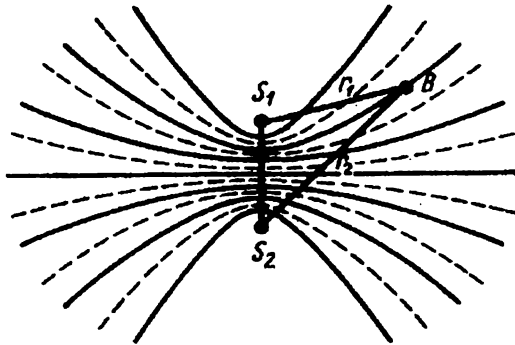


Рис. 25

Условия (15.1) и (15.2) сводятся к тому, что

$$r_1 - r_2 = \text{const.} \quad (15.3)$$

Выражение (15.3) представляет собой уравнение гиперболы с фокусами в точках S_1 и S_2 . Следовательно, геометрическое место точек, в которых наблюдается усиление или ослабление результирующего колебания, представляет собой семейство гипербол (см. рис. 25), отвечающих условию $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$. Между двумя интерференционными максимумами (на рис. 25 сплошные линии) находятся интерференционные минимумы (на рис. 25 штриховые линии).

§ 16. Стоячие волны

Особым случаем интерференции являются **стоячие волны** – это волны, образующиеся в результате наложения двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами.

Для вывода уравнения стоячей волны предположим, что две плоские волны распространяются навстречу друг другу вдоль оси x в среде без затухания, причем обе волны характеризуются одинаковыми амплитудами и частотами. Кроме того, начало координат выберем в точке, в которой обе волны имеют одинаковую начальную фазу, а отсчет времени начнем с момента, когда начальные фазы обеих волн равны нулю. Тогда соответственно уравнения волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x , и волны, распространяющейся ей навстречу, будут иметь вид

$$\begin{cases} \xi_1 = A \cos(\omega t - kx), \\ \xi_2 = A \cos(\omega t + kx). \end{cases} \quad (16.1)$$

Сложив эти уравнения и учитывая, что $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ [см. выражение (13.3)], получим уравнение стоячей волны

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos kx \cos \omega t = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t. \quad (16.2)$$

Из уравнения стоячей волны (16.2) вытекает, что в каждой точке этой волны происходят колебания той же частоты, но с амплитудой

$$A_{\text{ст}} = \left| 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right|, \text{ зависящей от координаты } x \text{ рассматриваемой точки.}$$

В точках среды, где

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (16.3)$$

амплитуда колебаний достигает максимального значения, равного $2A$. В точках среды, где

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm(m + 1/2)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (16.4)$$

амплитуда колебаний обращается в нуль. Точки, в которых амплитуда колебаний максимальна ($A_{\text{ст}} = 2A$), называются **пучностями стоячей волны**, а точки, в которых амплитуда колебаний равна нулю ($A_{\text{ст}} = 0$), называются **узлами стоячей волны**. Точки среды, находящиеся в узлах, колебаний не совершают.

Из выражений (16.3) и (16.4) получим соответственно координаты пучностей и узлов:

$$x_n = \pm m \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (16.5)$$

$$x_{\text{узн}} = \pm(m + 1/2) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (16.6)$$

Из формул (16.5) и (16.6) следует, что расстояния между двумя соседними пучностями и двумя соседними узлами одинаковы и равны половине длины волны бегущих волн $\lambda/2$. Эту величину называют **длиной стоячей волны**: $\lambda_{\text{ст}} = \lambda/2$. Расстояние между соседними пучностью и узлом стоячей волны равно $\lambda/4$.

В отличие от бегущей волны, все точки которой совершают колебания с одинаковой амплитудой, но с запаздыванием по фазе [в уравнении (16.1) бегущей волны фаза колебаний зависит от координаты x рассматриваемой точки], все точки стоячей волны между двумя узлами колеблются с разными амплитудами, но с одинаковыми фазами [в уравнении (16.2) стоячей волны аргумент косинуса не зависит от x]. При переходе через узел множитель $2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$ меняет свой знак, поэтому фаза колебаний по разные стороны от узла отличается на π , т. е. точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе.

Образование стоячих волн наблюдают при интерференции бегущей и отраженной волн. Например, если конец веревки закрепить неподвижно, то отраженная в месте закрепления веревки волна будет интерферировать с бегущей волной и образует стоячую волну. На границе, где происходит отражение волны, в данном случае возникает узел. Будет ли на границе отражения узел или пучность, зависит от соотношения плотностей сред. Если среда, от которой происходит отражение, менее плотная, то в месте отражения возникает пучность (рис. 26,а), если более плотная – узел (рис. 26,б). Образование узла связано с тем, что волна, отражаясь от более плотной среды, меняет фазу на противоположную и у границы происходит сложение колебаний с противоположными фазами, в результате чего получается узел. Если же волна отражается от менее плотной среды, то изменения фазы не происходит и у границы колебания складываются с одинаковыми фазами – образуется пучность.

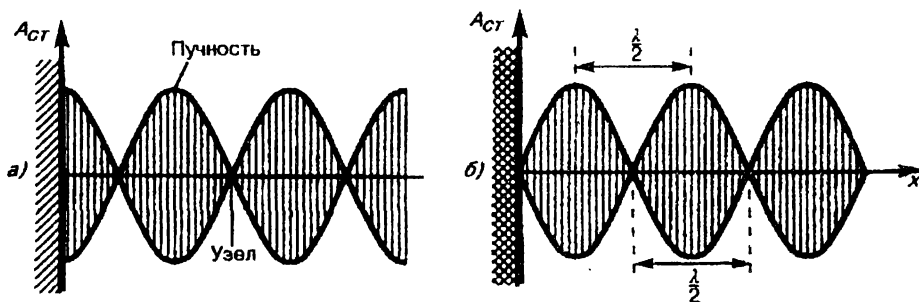


Рис. 26

Если рассматривать бегущую волну, то в направлении ее распространения переносится энергия колебательного движения. В случае же стоячей волны переноса энергии нет, так как падающая и отраженная волны одинаковой амплитуды несут одинаковую энергию в противоположных направлениях. Поэтому полная энергия результирующей стоячей волны, заключенной между узловыми точками, остается постоянной. Лишь в пределах расстояний, равных половине длины волны, происходят взаимные превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно.

Сравнительные характеристики стоячей и бегущей волн приведены табл. 1.

Сравнительные характеристики бегущей и стоячей волн

Характеристика волны	Бегущая волна	Стоячая волна
Уравнение	$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$	$\xi = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t$
Амплитуда	Одинакова во всех точках и равна A	Зависит от положения колеблющейся точки $0 \leq A_{\text{ст}} \leq 2A$
Фаза	Зависит от положения колеблющейся точки	Одинакова между двумя соседними узлами
Энергия	Переносит энергию	Не переносит энергию (в прямом и обратном направлениях за один и тот же промежуток времени переносятся равные порции энергии)

§ 17. Дифракция

Волны способны огибать препятствия. Так, морские волны свободно огибают выступающий из воды камень, если его размеры меньше длины волны или сравнимы с ней. За камнем волны распространяются так, как если бы его не было совсем. Точно так же волна от брошенного в пруд камня огибает торчащий из воды пруттик. Только за препятствием большего по сравнению с длиной волны размера образуется «тень»: волны за препятствие не проникают.

Явление отклонения от прямолинейного распространения и огибания волнами препятствий называется **дифракцией**. Дифракция – общее свойство волн любой природы. Соотношение между длиной волны λ и размерами препятствия L и определяет в основном поведение волны. Опыты показывают, что дифракция существует всегда, но становится заметной при условии $L \approx \lambda$.

Качественно поведение волны за преградой может быть объяснено с помощью принципа Гюйгенса [Х. Гюйгенс, нидерландский ученый (1629–1695)], который устанавливает способ построения фронта волны в момент времени $t + \Delta t$ по известному положению фронта в момент времени t . Согласно принципу Гюйгенса каждая точка, до которой доходит волновое движение, служит центром вторичных волн; огибающая этих волн дает поло-

жение фронта волны в следующий момент (рис. 27; среда предполагается неоднородной – скорость волны в нижней части рисунка больше, чем в верхней).

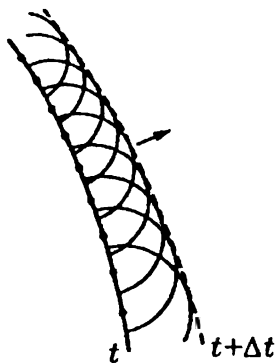


Рис. 27

Пусть на плоскую преграду с отверстием падает параллельный ей фронт волны (рис. 28). По Гюйгенсу, каждая точка выделяемого отверстием участка волнового фронта служит центром вторичных волн, которые в однородной и изотропной среде будут сферическими. Построив огибающую вторичных волн, мы убеждаемся в том, что за отверстием волна проникает в область геометрической тени (на рисунке границы этой области показаны штриховыми линиями), огибая края преграды. Принцип Гюйгенса не дает никаких указаний об интенсивности волн, распространяющихся в различных направлениях.

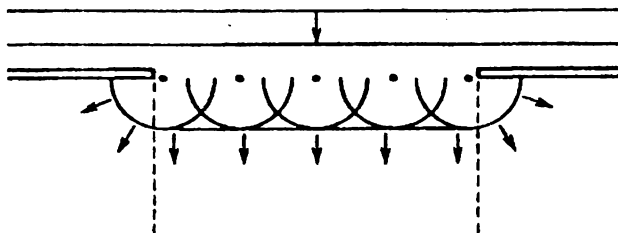


Рис. 28

Между интерференцией и дифракцией нет существенного различия. Оба явления заключаются в перераспределении интенсивности в резуль-

тате суперпозиции волн. По историческим причинам перераспределение интенсивности, возникающее в результате суперпозиции волн, возбуждаемых конечным числом дискретных когерентных источников, принято называть интерференцией волн. Перераспределение интенсивности, возникающее в результате суперпозиции волн, возбуждаемых когерентными источниками, расположенными непрерывно, принято называть дифракцией волн.

ГЛАВА 3. ОСНОВЫ АКУСТИКИ

§ 18. Звуковые волны

Звуковыми (или акустическими) волнами называются распространяющиеся в среде упругие волны, обладающие частотами в пределах 16 – 20 000 Гц. Волны указанных частот, воздействуя на слуховой аппарат человека, вызывают ощущение звука. Волны $\nu < 16$ Гц (инфразвуковые) и $\nu > 20$ кГц (ультразвуковые) органами слуха человека не воспринимаются.

Звуковые волны в газах и жидкостях могут быть только продольными, так как эти среды обладают упругостью лишь по отношению к деформациям сжатия (растяжения). В твердых телах звуковые волны могут быть как продольными, так и поперечными, так как твердые тела обладают упругостью по отношению к деформациям сжатия (растяжения) и сдвига.

Интенсивностью звука (или силой звука) называется величина, определяемая средней по времени энергией, переносимой звуковой волной в единицу времени сквозь единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны:

$$I = \frac{W}{St} \quad \begin{array}{l} W - \text{энергия} \\ St - \text{площадь} \cdot \text{время} \end{array}$$

Единица интенсивности звука в системе СИ – ватт на метр в квадрате (Вт/м^2).

Чувствительность человеческого уха различна для разных частот. Для того чтобы вызвать звуковое ощущение, волна должна обладать некоторой минимальной интенсивностью, но если эта интенсивность превышает определенный предел, то звук не слышен и вызывает только болевое ощущение. Таким образом, для каждой частоты колебаний существуют наименьшая (порог слышимости) и наибольшая (порог болевого ощущения) интенсивности звука, которые способны вызвать звуковое восприятие. На рис. 29 представлены зависимости порогов слышимости и болевого ощущения от частоты звука. Область, расположенная между этими двумя кривыми, является областью слышимости.



Рис. 29

Если интенсивность звука является величиной, объективно характеризующей волновой процесс, то субъективной характеристикой звука, связанной с его интенсивностью, является громкость звука, зависящая от частоты. Согласно физиологическому закону Вебера – Фехнера, с ростом интенсивности звука громкость возрастает по логарифмическому закону. На этом основании вводят объективную оценку громкости звука по измеренному значению его интенсивности

$$L = \lg \frac{I}{I_0},$$

где I_0 – интенсивность звука на пороге слышимости, принимаемая для всех звуков равной 10^{-12} Вт/м². Величина L называется уровнем интенсивности звука и выражается в белах (в честь одного из изобретателей телефона А. Белла (1847–1922)). Обычно пользуются единицами, в 10 раз меньшими, – децибелами (дБ).

Весь диапазон интенсивностей, при которых волна вызывает в человеческом ухе звуковое ощущение (от 10^{-12} до 10 Вт/м²), соответствует значениям уровня интенсивности звука от 0 до 130 дБ. Ориентировочные значения уровня интенсивности для некоторых звуков приведены в табл. 2.

Энергия, которую несут с собой звуковые волны, крайне мала. Если, например, предположить, что стакан с водой полностью поглощает всю падающую на него энергию звуковой волны с уровнем интенсивности 70 дБ (в этом случае количество поглощаемой в одну секунду энергии будет составлять примерно $2 \cdot 10^{-7}$ Вт), то для того, чтобы нагреть воду от комнатной температуры до кипения, потребуется время порядка десяти тысяч лет.

Физиологической характеристикой звука является уровень громкости, который выражается в фонах (фон). Громкость для звука в 1000 Гц (частота стандартного чистого тона) равна 1 фон, если его уровень интенсивнос-

Значения уровня интенсивности звуков

Звук	Уровень интенсивности, дБ
Тиканье часов	20
Шепот на расстоянии 1 м	20
Тихий разговор	40
Речь средней громкости	60
Громкая речь	70
Крик	80
Шум моторного самолета: на расстоянии 5 м	120
на расстоянии 3 м	130

ти равен 1 дБ. Например, шум в вагоне метро при большой скорости соответствует ≈ 90 фон, а шепот на расстоянии 1 м – ≈ 20 фон.

Реальный звук является наложением гармонических колебаний с большим набором частот, т. е. звук обладает акустическим спектром, который может быть сплошным (в некотором интервале присутствуют колебания всех частот) и линейчатым (присутствуют колебания отделенных друг от друга определенных частот).

Звук характеризуется, помимо громкости, еще высотой и тембром. Высота звука – качество звука, определяемое человеком субъективно на слух и зависящее от частоты звука. С ростом частоты высота звука увеличивается, т. е. звук становится «выше». Характер акустического спектра и распределения энергии между определенными частотами определяет своеобразие звукового ощущения, называемое тембром звука. Так, различные певцы, берущие одну и ту же ноту, имеют различный акустический спектр, т. е. их голоса имеют различный тембр.

Источником звука может быть всякое тело, колеблющееся в упругой среде со звуковой частотой (например, в струнных инструментах источником звука является струна, соединенная с корпусом инструмента).

Совершая колебания, тело вызывает колебания прилегающих к нему частиц среды с такой же частотой. Состояние колебательного движения последовательно передается (все более удаленным от тела частицам среды, т. е. в среде распространяется волна с частотой колебаний, равной частоте ее источника, и с определенной скоростью, зависящей от плотности и упругих свойств среды. Скорость распространения звуковых волн в газах вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \quad (18.1)$$

где R – молярная газовая постоянная, M – молярная масса; $\gamma = C_p / C_v$ – отношение молярных теплоемкостей газа при постоянных давлении и объеме, T – термодинамическая температура. Из формулы (18.1) вытекает, что скорость звука в газе не зависит от давления p газа, но возрастает с повышением температуры. Чем больше молярная масса газа, тем меньше в нем скорость звука. Например, при $T = 273$ К скорость звука в воздухе ($M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) $v = 331$ м/с, в водороде ($M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) $v = 1260$ м/с. Выражение (18.1) соответствует опытным данным.

При распространении звука в атмосфере необходимо учитывать целый ряд факторов: скорость и направление ветра, влажность воздуха, молекулярную структуру газовой среды, явления преломления и отражения звука на границе двух сред. Кроме того, любая реальная среда обладает вязкостью, поэтому наблюдается затухание звука, т.е. уменьшение его амплитуды и, следовательно, интенсивности звуковой волны по мере ее распространения. Затухание звука обусловлено в значительной мере его поглощением в среде, связанным с необратимым переходом звуковой энергии в другие формы энергии (в основном в тепловую).

Для акустики помещений большое значение имеет **реверберация звука** – процесс постепенного затухания звука в закрытых помещениях после выключения его источника. Если помещения пустые, то происходит медленное затухание звука и создается «гулкость» помещения. Если звуки затухают быстро (при применении звукопоглощающих материалов), то они воспринимаются приглушенными. Время реверберации – это время, в течение которого интенсивность звука в помещении ослабляется в миллион раз, а его уровень – на 60 дБ. Помещение обладает хорошей акустикой, если время реверберации составляет 0,5 – 1,5 с.

§ 19. Эффект Доплера в акустике

Эффектом Доплера [Х. Доплер (1803–1853) – австрийский физик, математик и астроном] называется изменение частоты колебаний, воспринимаемой приемником, при движении источника этих колебаний и приемника относительно друг друга. Например, из опыта известно, что тон гудка поезда повышается по мере его приближения к платформе и понижается при удалении, т. е. движение источника колебаний (гудка) относительно приемника (уха) изменяет частоту принимаемых колебаний.

Для рассмотрения эффекта Доплера предположим, что источник и приемник звука движутся вдоль соединяющей их прямой; $v_{\text{ист}}$ и $v_{\text{пр}}$ – соот-

ветственно скорости движения источника и приемника, причем они положительны, если источник (приемник) приближается к приемнику (источнику), и отрицательны, если удаляется. Частота колебаний источника равна ν_0 .

19.1. Источник и приемник покоятся относительно среды,

$$\text{т. е. } \nu_{\text{ист}} = \nu_{\text{пр}} = 0$$

Если ν – скорость распространения звуковой волны в рассматриваемой среде, то длина волны $\lambda = \nu T = \frac{\nu}{\nu_0}$. Распространяясь в среде, волна достигнет приемника и вызовет колебания его звуковоспринимающего элемента с частотой

$$\nu = \frac{\nu}{\lambda} = \frac{\nu}{\nu T} = \nu_0.$$

Следовательно, частота ν звука, которую регистрирует приемник, равна частоте ν_0 , с которой звуковая волна излучается источником.

19.2. Приемник приближается к источнику, а источник покоится,

$$\text{т. е. } \nu_{\text{пр}} > 0, \nu_{\text{ист}} = 0$$

В данном случае скорость распространения волны относительно приемника станет равной $\nu + \nu_{\text{пр}}$. Так как длина волны при этом не меняется, то

$$\nu = \frac{\nu + \nu_{\text{пр}}}{\lambda} = \frac{\nu + \nu_{\text{пр}}}{\nu T} = \frac{(\nu + \nu_{\text{пр}})\nu_0}{\nu},$$

т.е. частота колебаний, воспринимаемых приемником, в $\frac{\nu + \nu_{\text{пр}}}{\nu}$ раз больше частоты колебаний источника.

19.3. Источник приближается к приемнику, а приемник покоится,

$$\text{т. е. } \nu_{\text{ист}} > 0, \nu_{\text{пр}} = 0$$

Скорость распространения колебаний зависит лишь от свойств среды, поэтому за время, равное периоду колебаний источника, излученная им волна пройдет в направлении к приемнику расстояние νT (равное длине волны λ) независимо от того, движется ли источник или покоится. За это же время источник пройдет в направлении волны расстояние $\nu_{\text{ист}} T$ (рис. 30), т. е. длина волны в направлении движения сократится и станет равной

$\lambda' = \lambda - v_{\text{ист}} T = (v - v_{\text{ист}}) T$, тогда

$$v = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - v_{\text{ист}}) T} = \frac{v v_0}{v - v_{\text{ист}}},$$

т.е. частота колебаний, воспринимаемых приемником, увеличится в $\frac{v}{v - v_{\text{ист}}}$ раз. В случаях, описанных в п. 19.2 и 19.3, если $v_{\text{пр}} < 0$ и $v_{\text{ист}} < 0$, знак будет обратным.

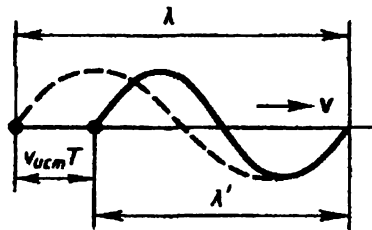


Рис. 30

19.4. Источник и приемник движутся относительно друг друга

Используя результаты, полученные для случаев, приведенных в пп. 19.2 и 19.3, можно записать выражение для частоты колебаний, воспринимаемых приемником:

$$v = \frac{(v \pm v_{\text{пр}}) v_0}{v \mp v_{\text{ист}}}, \quad (19.1)$$

причем верхний знак берется, если при движении источника или приемника происходит их сближение, нижний знак – в случае их взаимного удаления.

Из приведенных формул следует, что эффект Доплера различен в зависимости от того, движется ли источник или приемник. Если направления скоростей $v_{\text{ист}}$ и $v_{\text{пр}}$ не совпадают с проходящей через источник и приемник прямой, то вместо этих скоростей в формуле (19.1) надо брать их проекции на направление этой прямой.

§ 20. Ультразвук и его применение

По своей природе ультразвук представляет собой упругие волны, и в этом он не отличается от звука (см. § 18). Однако ультразвук, обладая высокими частотами ($\nu > 20$ кГц) и, следовательно, малыми длинами волн, характеризуется особыми свойствами, что позволяет выделить его в отдельный класс явлений. Из-за малых длин ультразвуковые волны, как и свет, могут быть получены в виде строго направленных пучков. Для генерации ультразвука используются в основном два явления. Обратный пьезоэлектрический эффект – это возникновение деформации в вырезанной определенным образом кварцевой пластинке (в последнее время вместо кварца применяется титанат бария) под действием электрического поля. Если такую пластинку поместить в высокочастотное переменное поле, то можно вызвать ее вынужденные колебания. При резонансе на собственной частоте пластинки получают большие амплитуды колебаний и, следовательно, большие интенсивности излучаемой ультразвуковой волны. Идея кварцевого ультразвукового генератора принадлежит французскому физику П. Ланжевону (1872–1946).

Магнитострикция – это возникновение деформации в ферромагнетиках под действием магнитного поля. Поместив ферромагнитный стержень (например, из никеля или железа) в быстропеременное магнитное поле, возбуждают его механические колебания, амплитуда которых максимальна в случае резонанса. Ультразвуки широко используются в технике, например для направленной подводной сигнализации, обнаружения подводных предметов и определения глубин (гидролокатор, эхолот). Например, в эхолоте от пьезокварцевого генератора, укрепленного на судне, посылаются направленные ультразвуковые сигналы, которые, достигнув дна, отражаются от него и возвращаются обратно. Зная скорость их распространения в воде и определяя время прохождения (от подачи до возвращения) ультразвукового сигнала, можно вычислить глубину. Прием эха также производится с помощью пьезокварца. Звуковые колебания, дойдя до пьезокварца, вызывают в нем упругие колебания, в результате чего на противоположных поверхностях кварца возникают электрические заряды, которые измеряются.

Если пропускать ультразвуковой сигнал через исследуемую деталь, то можно обнаружить в ней дефекты по характерному рассеянию пучка и по появлению ультразвуковой тени. На этом принципе создана целая отрасль техники – ультразвуковая дефектоскопия, начало которой положено С. Я. Соколовым (1897–1957). Применение ультразвука легло также в основу новой области акустики – акустоэлектроники, позволяющей на ее основе разрабатывать приборы для обработки сигнальной информации в микрорадиоэлектронике.

Ультразвук применяют для воздействия на различные процессы (кристаллизацию, диффузию, тепло- и массообмен в металлургии и т. д.) и биологические объекты (повышение интенсивности процессов обмена и т. д.), для изучения физических свойств веществ (поглощения, структуры вещества и т. д.). Ультразвук используется также для механической обработки очень твердых и очень хрупких тел, в медицине (диагностика, ультразвуковая хирургия, микромассаж тканей) и т. д.

ГЛАВА 4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

§ 21. Экспериментальное получение электромагнитных волн

Существование **электромагнитных волн** – переменного электромагнитного поля, распространяющегося в пространстве с конечной скоростью, – вытекает из уравнений Максвелла [Д. К. Максвелл – английский физик (1831–1879)]. Уравнения Максвелла сформулированы в 1865 г. на основе обобщения эмпирических законов электрических и магнитных явлений. Решающую роль для утверждения максвелловской теории сыграли опыты Герца (1888) [Г. Герц – немецкий физик (1857–1894)], доказавшие, что электрические и магнитные поля действительно распространяются в виде волн, поведение которых полностью описывается уравнениями Максвелла.

Источником электромагнитных волн в действительности может быть любой электрический колебательный контур или проводник, по которому течет переменный электрический ток, так как для возбуждения электромагнитных волн необходимо создать в пространстве переменное электрическое поле (ток смещения) или соответственно переменное магнитное поле. Однако излучающая способность источника определяется его формой, размерами и частотой колебаний. Чтобы излучение играло заметную роль, необходимо увеличить объем пространства, в котором переменное электромагнитное поле создается. Поэтому для получения электромагнитных волн непригодны закрытые колебательные контуры, так как в них электрическое поле сосредоточено между обкладками конденсатора, а магнитное – внутри катушки индуктивности.

Герц в своих опытах, уменьшая число витков катушки и площадь пластин конденсатора, а также раздвигая их (рис. 31,а,б), совершил переход от закрытого колебательного контура к открытому колебательному контуру (вибратору Герца), представляющему собой два стрежня, разделенных искровым промежутком (рис. 31,в). Если в закрытом колебательном контуре переменное электрическое поле сосредоточено внутри конденсатора

(рис. 31,а), то в открытом оно заполняет окружающее контур пространство (рис. 31,б), что существенно повышает интенсивность электромагнитного излучения. Колебания в такой системе поддерживаются за счет источника ЭДС, подключенного к обкладкам конденсатора, а искровой промежуток применяется для того, чтобы увеличить разность потенциалов, до которой первоначально заряжаются обкладки.

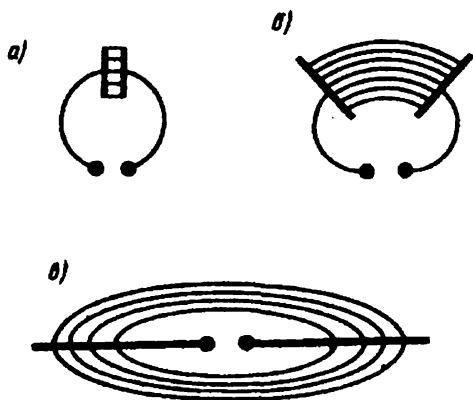


Рис. 31

Для возбуждения электромагнитных волн вибратор Герца В подключался к индуктору И (рис. 32). Когда напряжение на искровом промежутке достигало пробивного значения, возникала искра, закорачивающая обе половины вибратора, и в нем возникали свободные затухающие колебания. При исчезновении искры контур размыкался и колебания прекращались. Затем индуктор снова заряжал конденсатор, возникала искра и в контуре опять наблюдались колебания и т. д. Для регистрации электромагнитных волн Герц пользовался вторым вибратором, называемым резонатором Р, имеющим такую же частоту собственных колебаний, что и излучающий вибратор, т. е. настроенным в резонанс с вибратором. Когда электромагнитные волны достигали резонатора, то в его зазоре проскакивала электрическая искра.

С помощью описанного вибратора Герц экспериментировал с электромагнитными волнами, длина волны которых составляла примерно 3 м. П. Н. Лебедев, применяя миниатюрный вибратор из тонких платиновых стерженьков, получил миллиметровые электромагнитные волны с $\lambda = 6 - 4$ мм. Дальнейшее развитие методики эксперимента в этом направлении позволило в 1923 г. российскому физику А. А. Глаголевой-Аркадьевой (1884–1945)

сконструировать массовый излучатель, в котором короткие электромагнитные волны, возбуждаемые колебаниями электрических зарядов в атомах и молекулах, генерировались с помощью искр, проскакивающих между металлическими опилками, взвешенными в масле. Так были получены волны с λ от 50 мм до 80 мкм. Тем самым было доказано существование волн, перекрывающих интервал между радиоволнами и инфракрасным излучением.

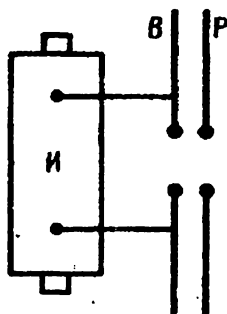


Рис. 32

Недостатком вибраторов Герца и Лебедева и массового излучателя Глаголевой-Аркадьевой являлось то, что свободные колебания в них быстро затухали и обладали малой мощностью. Для получения незатухающих колебаний необходимо создать автоколебательную систему (см. § 6), которая обеспечивала бы подачу энергии с частотой, равной частоте собственных колебаний контура. Поэтому в 20-х годах XX столетия перешли к генерированию электромагнитных волн с помощью электронных ламп. Ламповые генераторы позволяют получать колебания заданной (практически любой) мощности и синусоидальной формы.

Электромагнитные волны, обладая широким диапазоном частот (или длин волн $\lambda = c/\nu$, где c – скорость электромагнитных волн в вакууме), отличаются друг от друга по способам их генерации и регистрации, а также по своим свойствам. Поэтому электромагнитные волны делятся на несколько видов: радиоволны, световые волны, рентгеновское и γ -излучения (табл.3). Следует отметить, что границы между различными видами электромагнитных волн довольно условны.

Шкала электромагнитных волн

Вид излучения	Длина волны, м	Частота волны, Гц	Источники. Основные методы возбуждения
Радиоволны	$10^3 - 10^4$	$3 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^{12}$	Переменные токи в проводниках и электронных потоках (колебательный контур, вибратор Герца, массовый излучатель, ламповый генератор)
Световые волны			
▪ инфракрасное излучение	$5 \cdot 10^{-4} - 8 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{11} - 3,75 \cdot 10^{14}$	Излучение молекул и атомов при тепловых и электрических воздействиях (лампы, лазеры)
▪ видимый свет	$8 \cdot 10^{-7} - 4 \cdot 10^{-7}$	$3,75 \cdot 10^{14} - 7,5 \cdot 10^{14}$	Излучение молекул и атомов при тепловых и электрических воздействиях (лампы, лазеры)
▪ ультрафиолетовое излучение	$4 \cdot 10^{-7} - 10^{-9}$	$7,5 \cdot 10^{14} - 3 \cdot 10^{17}$	Излучение атомов при воздействии ускоренных электронов (лампы)
Рентгеновское излучение	$2 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-12}$	$1,5 \cdot 10^{17} - 5 \cdot 10^{19}$	Атомные процессы при воздействии ускоренных заряженных частиц (трубки Рентгена)
Гамма-излучение	$< 6 \cdot 10^{-12}$	$> 5 \cdot 10^{19}$	Радиоактивный распад. Ядерные процессы. Космические процессы

§ 22. Дифференциальное уравнение электромагнитной волны

Для однородной и изотропной среды вдали от зарядов и токов, создающих электромагнитное поле, из уравнений Максвелла следует, что векторы напряженностей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ переменного электромагнитного поля удовлетворяют волновому уравнению типа (13.9):

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (22.1)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \quad (22.2)$$

где v – фазовая скорость.

Всякая функция, удовлетворяющая уравнениям (22.1) и (22.2), описывает некоторую волну. Следовательно, электромагнитные поля действительно могут существовать в виде электромагнитных волн. Фазовая скорость электромагнитных волн определяется выражением

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}, \quad (22.3)$$

где $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, ϵ_0 и μ_0 соответственно электрическая и магнитная постоянные, ϵ и μ – соответственно электрическая и магнитная проницаемости среды.

В вакууме (при $\epsilon = 1$ и $\mu = 1$) скорость распространения электромагнитных волн совпадает со скоростью c . Так как $\epsilon \mu > 1$, то скорость распространения электромагнитных волн в веществе всегда меньше, чем в вакууме.

При вычислении скорости распространения электромагнитного поля по формуле (22.3) получается результат, достаточно хорошо совпадающий с экспериментальными данными, если учитывать зависимость ϵ и μ от частоты. Совпадение же размерного коэффициента в (22.3) со скоростью распространения света в вакууме указывает на глубокую связь между электромагнитными и оптическими явлениями, позволившую Максвеллу создать электромагнитную теорию света, согласно которой свет представляет собой электромагнитные волны.

Следствием теории Максвелла является поперечность электромагнитных волн: векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ напряженностей электрического и магнитного полей волны взаимно перпендикулярны (на рис. 33 показана моментальная «фотография» плоской электромагнитной волны) и лежат в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{v}$ скорости распространения волны, причем векторы $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{v}$ образуют правовинтовую систему. Из уравнений Максвелла следует также, что в электромагнитной волне векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ всегда колеблются в одинаковых фазах (см. рис. 33), причем мгновенные значения E и H в любой точке связаны соотношением

$$\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H. \quad (22.4)$$

Следовательно, E и H одновременно достигают максимума, одновременно обращаются в нуль и т.д. От уравнений (22.1) и (22.2) можно перейти к уравнениям

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_y}{\partial t^2}, \quad (22.5)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}_z}{\partial t^2}, \quad (22.6)$$

где соответственно индексы y и z при E и H подчеркивают лишь то, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей y и z .

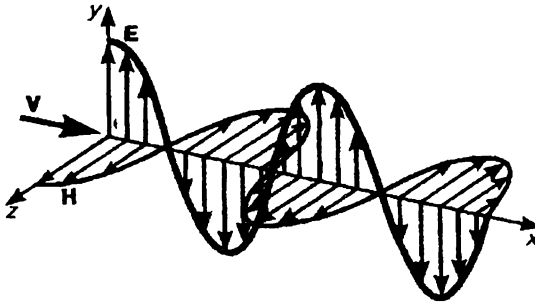


Рис. 33

Уравнениям (22.5) и (22.6) удовлетворяют, в частности, плоские монохроматические электромагнитные волны (электромагнитные волны одной строго определенной частоты), описываемые уравнениями

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad (22.7)$$

$$H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad (22.8)$$

где E_0 и H_0 – соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны, ω – круговая частота волны, $k = \omega/v$ – волновое число, φ – начальные фазы колебаний в точках с координатой $x = 0$. В уравнениях (22.7) и (22.8) φ одинаковы, так как колебания электрического и магнитного векторов в электромагнитной волне происходят в одинаковых фазах.

§ 23. Энергия электромагнитных волн. Импульс электромагнитного поля

Возможность обнаружения электромагнитных волн указывает на то, что они переносят энергию. Объемная плотность w энергии электромагнитной волны складывается из объемных плотностей $w_{эл}$ и $w_{м}$ электрического и магнитного полей:

$$w = w_{эл} + w_{м} = \epsilon_0 \epsilon E^2 / 2 + \mu_0 \mu H^2 / 2.$$

Учитывая выражение (22.4), получим, что плотности энергии электрического и магнитного полей в каждый момент времени одинаковы, т. е. $w_{эл} = w_{м}$. Поэтому

$$w = 2w_{эл} = \epsilon_0 \epsilon E^2 = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\epsilon \mu} EH.$$

Умножив плотность энергии w на скорость v распространения волны в среде [см. (22.3)], получим модуль плотности потока энергии:

$$S = wv = EH.$$

Так как векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему, то направление вектора $[\vec{E} \vec{H}]$ совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен EH . Вектор плотности потока электромагнитной энергии называется **вектором Умова – Пойнтинга** [Д. Г. Пойнтинг – английский физик (1852–1914)]:

$$\vec{S} = [\vec{E} \vec{H}].$$

Вектор $\vec{S}$ направлен в сторону распространения электромагнитной волны, а его модуль равен энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.

Если электромагнитные волны поглощаются или отражаются телами (эти явления подтверждены опытами Г. Герца), то из теории Максвелла следует, что электромагнитные волны должны оказывать на тела давление. Давление электромагнитных волн объясняется тем, что под действием электрического поля волны заряженные частицы вещества начинают упорядоченно двигаться и подвергаются со стороны магнитного поля волны действию сил Лоренца. Однако значение этого давления ничтожно мало. Можно оценить, что при средней мощности солнечного излучения, прихо-

дающего на Землю, давление для абсолютно поглощающей поверхности составляет примерно 5 мкПа. В исключительно тонких экспериментах, ставших классическими, П. Н. Лебедев в 1899 г. доказал существование светового давления на твердые тела, а в 1910 г. – на газы. Опыты Лебедева имели огромное значение для утверждения выводов теории Максвелла о том, что свет представляет собой электромагнитные волны.

Существование давления электромагнитных волн приводит к заключению о том, что электромагнитному полю присущ механический импульс. Импульс электромагнитного поля

$$P = \frac{W}{c},$$

где W – энергия электромагнитного поля. Выражая импульс как $p = mc$ (поле в вакууме распространяется со скоростью c), получим $p = mc = W/c$, откуда

$$W = mc^2. \quad (23.1)$$

Это соотношение между массой и энергией электромагнитного поля является универсальным законом природы. Согласно специальной теории относительности, выражение (23.1) имеет общее значение и справедливо для любых тел независимо от их внутреннего строения.

Таким образом, рассмотренные свойства электромагнитных волн, определяемые теорией Максвелла, полностью подтверждаются опытами Герца, Лебедева и выводами специальной теории относительности, сыгравшими решающую роль для подтверждения и быстрого признания этой теории.

§ 24. Излучение диполя. Применение электромагнитных волн

Простейшим излучателем электромагнитных волн является электрический диполь, электрический момент которого изменяется во времени по гармоническому закону

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t,$$

где p_0 – амплитуда вектора $\vec{p}$. Примером подобного диполя может служить система, состоящая из покоящегося положительного заряда $+Q$ и отрицательного заряда $-Q$, гармонически колеблющегося вдоль направления $\vec{p}$ с частотой ω .

Задача об излучении диполя имеет в теории излучающих систем важное значение, так как всякую реальную излучающую систему (например,

антенну) можно рассчитывать, рассматривая излучение диполя. Кроме того, многие вопросы взаимодействия излучения с веществом можно объяснить на основе классической теории, рассматривая атомы как системы зарядов, в которых электроны совершают гармонические колебания около их положений равновесия.

Характер электромагнитного поля диполя зависит от выбора рассматриваемой точки. Особый интерес представляет так называемая **волновая зона диполя** – точки пространства, отстоящие от диполя на расстояния r , значительно превышающие длину волны ($r \gg \lambda$), – так как в ней картина электромагнитного поля диполя сильно упрощается. Это связано с тем, что в волновой зоне диполя практически остаются только «отпочковавшие» от диполя, свободно распространяющиеся поля, в то время как поля, колеблющиеся вместе с диполем и имеющие более сложную структуру, сосредоточены в области расстояний $r \leq \lambda$.

Если волна распространяется в однородной изотропной среде, то время прохождения волны до точек, удаленных от диполя на расстояние r , одинаково. Поэтому во всех точках сферы, центр которой совпадает с диполем, фаза колебаний одинакова, т.е. в волновой зоне волновой фронт будет сферическим и, следовательно, волна, излучаемая диполем, есть сферическая волна.

В каждой точке векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ колеблются по закону $\cos(\omega t - kr)$, амплитуды этих векторов пропорциональны $\frac{1}{r} \sin \vartheta$ (для вакуума), т.е. зависят от расстояния r до излучателя и угла ϑ между направлением радиуса-вектора и осью диполя. Отсюда следует, что интенсивность излучения диполя в волновой зоне

$$I \sim \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2}. \quad (24.1)$$

Зависимость (24.1) I от ϑ при заданном значении r , приводимая в полярных координатах (рис. 34), называется диаграммой направленности излучения диполя. Как видно из выражения (24.1) и приведенной диаграммы, диполь сильнее всего излучает в направлениях, перпендикулярных его оси ($\vartheta = \pi/2$). Вдоль своей оси ($\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$) диполь не излучает вообще. Диаграмма направленности излучения диполя позволяет формировать излучение с определенными характеристиками и используется при конструировании антенн.

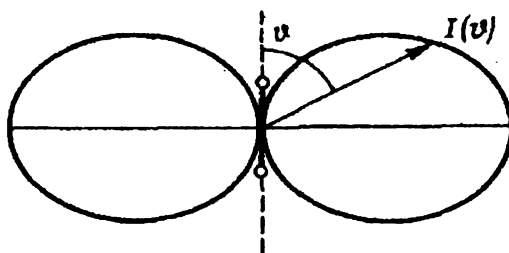


Рис. 34

Впервые электромагнитные волны были использованы через семь лет после опытов Герца. 7 мая 1895 г. преподаватель физики офицерских минных классов А. С. Попов (1859–1906) на заседании Русского физико-химического общества продемонстрировал первый в мире радиоприемник, открывший возможность практического использования электромагнитных волн для беспроводной связи, преобразившей жизнь человечества. Первая переданная в мире радиограмма содержала лишь два слова: «Генрих Герц». Изобретение радио Поповым сыграло огромную роль для распространения и развития теории Максвелла.

Электромагнитные волны сантиметрового и миллиметрового диапазонов, встречая на своем пути преграды, отражаются от них. Это явление лежит в основе **радиолокации** – обнаружения предметов (например, самолетов, кораблей и т. д.) на больших расстояниях и точного определения их положения с помощью радиоволн. Помимо этого, методы радиолокации используются для наблюдения прохождения и образования облаков, движения метеоритов в верхних слоях атмосферы и т. д.

Для электромагнитных волн характерно явление дифракции – огибания волнами различных препятствий (см. § 17). Именно благодаря дифракции радиоволн возможна устойчивая радиосвязь между удаленными пунктами, разделенными между собой выпуклостью Земли. Длинные волны (сотни и тысячи метров) применяются в фототелеграфии, короткие волны (несколько метров и меньше) применяются в телевидении для передачи изображений на небольшие расстояния (немногом больше пределов прямой видимости). Электромагнитные волны используются также в радиогеодезии для очень точного определения расстояний с помощью радиосигналов, в радиоастрономии для исследования радиоизлучения небесных тел и т. д. Полное описание применения электромагнитных волн дать практически невозможно, так как нет областей науки и техники, где бы они не использовались.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

- 1. Составьте логическую схему базы знаний по теме юниты.*

4. Дополните таблицу №3 столбцом «Применение электромагнитных волн данного диапазона».

Таблица 3

Шкала электромагнитных волн

Вид излучения	Длина волны, м	Частота волны, Гц	Источники. Основные методы возбуждения	Применение электромагнитных волн данного диапазона
Радиоволны	$10^3 - 10^{-4}$	$3 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^{12}$	Переменные токи в проводниках и электронных потоках (колебательный контур, вибратор Герца, массовый излучатель, ламповый генератор)	
Световые волны				
▪ инфракрасное излучение	$5 \cdot 10^{-4} - 8 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{11} - 3,75 \cdot 10^{14}$	Излучение молекул и атомов при тепловых и электрических воздействиях (лампы, лазеры)	
▪ видимый свет	$8 \cdot 10^{-7} - 4 \cdot 10^{-7}$	$3,75 \cdot 10^{14} - 7,5 \cdot 10^{14}$	Излучение молекул и атомов при тепловых и электрических воздействиях (лампы, лазеры)	
▪ ультрафиолетовое излучение	$4 \cdot 10^{-7} - 10^{-9}$	$7,5 \cdot 10^{14} - 3 \cdot 10^{17}$	Излучение атомов при воздействии ускоренных электронов (лампы)	
Рентгеновское излучение	$2 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-12}$	$1,5 \cdot 10^{17} - 5 \cdot 10^{19}$	Атомные процессы при воздействии ускоренных заряженных частиц (трубки Рентгена)	
Гамма-излучение	$< 6 \cdot 10^{-12}$	$> 5 \cdot 10^{19}$	Радиоактивный распад. Ядерные процессы. Космические процессы	

ТРЕНИНГ УМЕНИЙ

1. Пример выполнения упражнения тренинга на умение № 1.

Задание

Материальная точка массой 50 г колеблется по закону $x = 0,05 \cos \pi(0,2t + 0,25)$. Напишите уравнения для скорости и ускорения этой точки. Найдите максимальную силу, действующую на точку, и полную энергию колеблющейся точки. Какова скорость точки при $t = 10$ с?

Решение

Выполните последовательность алгоритма, указанную в перечне для умения № 1.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Уравнение гармонического колебания имеет вид $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. По данным задачи составить уравнение такого вида, учитывая, что $T = 2\pi / \omega_0$, A – амплитуда колебания.	Преобразуем уравнение к виду $x = 0,05 \cos(0,2\pi t + 0,25\pi)$. Отсюда видно, что $A = 0,05$ м, $\omega_0 = 0,2\pi$ с ⁻¹ , $\varphi_0 = 0,25\pi$ рад.
2	Составить уравнение для скорости точки: $v_x = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2)$, где $v_m = A\omega_0$.	Подставим найденные величины в уравнение для скорости точки $v_x = 0,05 \cdot 0,2\pi \cos(0,2\pi t + 0,25\pi + \pi/2)$ или $v_x = 0,01\pi \cos \pi(0,2t + 0,75)$.
3	Составить уравнение для ускорения гармонически колеблющейся точки $a_x = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi)$, где $a_m = A\omega_0^2$.	Подставим найденные величины в уравнение для ускорения гармонически колеблющейся точки $a_x = 0,05 \cdot (0,2\pi)^2 \cos(0,2\pi t + 0,25\pi + \pi)$ или $a_x = -0,002\pi^2 \cos \pi(0,2t + 0,25)$. Из данного выражения видно, что $a_m = 0,002\pi^2$ м/с ² $\approx 0,02$ м/с ² .
4	Согласно второму закону Ньютона найти максимальную силу, действующую на точку: $F_m = ma_m$	Подставим найденное максимальное ускорение в выражение второго закона Ньютона $F_m = 0,05 \cdot 0,02 = 10^{-3}$ Н.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
5	Составить выражение для кинетической энергии: $K = \frac{mv^2}{2} =$ $= \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$	$K = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{0,05 \cdot [0,01\pi \cos \pi(0,2t + 0,75)]^2}{2}$
6	Составить выражение для потенциальной энергии: $\Pi = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} =$ $= \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$	$\Pi = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} =$ $= \frac{0,05 \cdot (0,2\pi)^2 [0,05 \cos(0,2\pi t + 0,25\pi)]^2}{2}$
7	Составить выражение для полной энергии: $E = K + \Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$	Полная энергия колеблющейся точки равна $E = K + \Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = \frac{mv_m^2}{2}$. Подставим уже найденную максимальную скорость в эту формулу. $E = 0,05 \cdot (0,01\pi)^2 / 2 \approx 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$
8	Подставить в данные уравнения предложенное время и найти искомые величины.	В уравнение скорости подставим $t = 10\text{с}$, получим $v_x = 0,01\pi \cos \pi(0,2 \cdot 10 + 0,75) \approx 0,022 \text{ м/с.}$

Выполните самостоятельно следующие задания.

Задание 1.1

Напряжение на концах участка цепи, по которому течет переменный ток, изменяется с течением времени по закону $u = U_m \sin(\omega t + \pi/6)$. В момент времени $t = T/12$ мгновенное значение напряжения $u = 10 \text{ В}$. Определите амплитуду напряжения U_m и циклическую частоту ω , если период колебаний силы тока $T = 0,01 \text{ с}$. Начертите график зависимости изменения напряжения от времени.

Задание 1.2

Тело совершает колебания по закону $x = 0,3 \sin \pi(t + 0,5)$ м. Найти амплитуду, период, начальную фазу колебаний и ускорение в момент времени $t = 0,5$ с.

Задание 1.3

Шарик массой 10 г совершает гармонические колебания с амплитудой 0,2 м и периодом 4 с. В начальный момент времени $x = A$. Найти кинетическую и потенциальную энергию в момент времени 1 с.

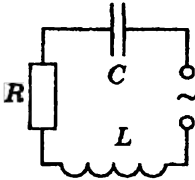
2. Пример выполнения упражнения тренинга на умение № 2.

Задание

В цепь переменного тока стандартной частоты ($\nu = 50$ Гц) последовательно включены резистор сопротивлением $R = 21$ Ом, катушка индуктивностью $L = 0,07$ Гн и конденсатор емкостью $C = 82$ мкФ. Определите индуктивное, емкостное и полное сопротивления цепи, а также сдвиг фаз между силой тока и напряжением. Какова активная мощность, если сила тока в цепи равна 2 А.

Решение

Выполните последовательность алгоритма, указанную в перечне для умения № 2.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Начертить схему и указать на ней все элементы цепи: источники тока, резисторы и конденсаторы.	
2	Установить (если схема дается в готовом виде), какие элементы цепи включены последовательно, а какие параллельно.	
3	Определить величину емкостного ($R_C = \frac{1}{\omega C}$) и индуктивного ($R_L = \omega L$) сопротивлений.	Индуктивное сопротивление находим по формуле $R_L = \omega L = 2\pi\nu L = 22$ Ом. Емкостное сопротивление вычисляется по формуле $R_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C} \approx 39 \text{ Ом.}$
4	Определить полное сопротивление цепи	Полное сопротивление равно: $Z = \sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right]^2} = 27 \text{ Ом.}$ $Z = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
5	Используя закон Ома для цепи переменного тока, установить связь между токами и напряжениями.	По закону Ома для цепи переменного тока $U = I \cdot Z = 54 \text{ В.}$
6	Найти коэффициент мощности $\cos \varphi$ и сдвиг фаз.	Коэффициент мощности определяется следующим образом: $\cos \varphi = \frac{R}{Z} = 0,777...; \quad \varphi \approx 39^\circ.$
7	Вычислить активную мощность.	Активную мощность в цепи можно рассчитать из формулы $P = UI \cos \varphi = 83,916 \text{ Вт.}$

Выполните самостоятельно следующие задания.

Задание 2.1

В сеть стандартной частоты с напряжением 100 В последовательно включены резистор сопротивлением 150 Ом и конденсатор емкостью 16 мкФ. Найдите полное сопротивление цепи, силу тока в ней, напряжения на зажимах резистора и конденсатора и сдвиг фаз между силой тока и напряжением.

Задание 2.2

Каковы показания приборов в цепях, представленных схемами на рисунке 1, а, б? Напряжение сети $U = 250$ В, $R = 120$ Ом, $C = 20$ мкФ.

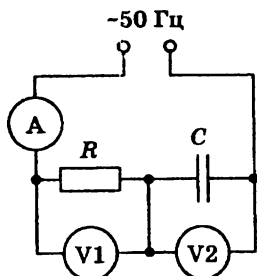


Рис. 1 а

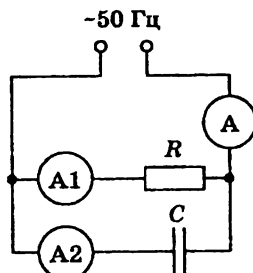


Рис. 1 б.

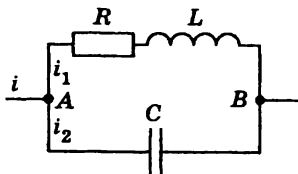
Задание 2.3

В сеть переменного тока стандартной частоты с напряжением 210 В включены последовательно резистор сопротивлением 40 Ом и катушка индуктивностью 0,2 Гн. Определите силу тока в цепи и сдвиг фаз между силой тока и напряжением. Конденсатор какой емкости надо включить последовательно в цепь, чтобы сдвиг фаз оказался равным нулю? Какой будет сила тока в цепи в этом случае?

3. Пример выполнения упражнения тренинга на умение № 3.

Задание

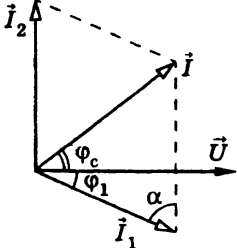
В цепи (см. рис.) параметры R , L и C известны. Напряжение между точками A и B равно U . Постройте векторную диаграмму сил токов в данной цепи и определите силу тока в неразветвленном участке цепи. Найдите сдвиг фаз между колебаниями силы тока и напряжения.



Решение

Выполните последовательность алгоритма, указанную в перечне для умения № 3.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Определить, какие элементы составляют цепь	В этой задаче рассматривается электрическая цепь, состоящая из двух ветвей, соединенных параллельно.
2	Разбить сложную цепь на простые участки.	Одна ветвь содержит резистор и катушку индуктивности, другая – конденсатор
3	Для каждого участка выбрать постоянную величину и наложить ее на ось x .	Построение векторной диаграммы начнем с вектора действующего значения напряжения U , поскольку напряжение одинаково для обеих ветвей цепи. Направим вектор $\vec{U}$ горизонтально вправо.
4	Для каждого участка построить вектора тока и напряжения так, чтобы угол между ними соответствовал сдвигу по фазе.	Колебания силы тока i_1 отстают по фазе от колебаний напряжения на угол φ_1 $\left(\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L}{R} \right)$, так как верхний участок цепи содержит катушку индуктивности. Поэтому вектор $\vec{I}_1$ повернут относительно вектора $\vec{U}$ на угол φ_1 в отрицатель-

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
		ную сторону (по часовой стрелке). Сила тока i_2, текущего через конденсатор, опережает по фазе напряжение на $\pi/2$. Соответствующий вектор $\vec{I}_2$ повернут относительно вектора $\vec{U}$ на угол $\pi/2$ в положительную сторону (против часовой стрелки). Его модуль $I_2 = \omega CU$.
5	Совместить построенные диаграммы, наложив равные величины.	 Сила тока I является суммой сил токов I_1 и I_2 (см. рис.). Действующее значение силы тока в неразветвленной части цепи находится с помощью векторной диаграммы $\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2$.
6	Найти разность фаз между полным током и полным напряжением.	Пользуясь теоремой косинусов, из векторной диаграммы определяем $I^2 = I_1^2 + I_2^2 - 2I_1I_2 \cos \alpha$. Так как $\alpha = \pi/2 - \varphi_1$, то $\cos \alpha = \sin \varphi_1$ и $I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 - 2I_1I_2 \sin \varphi_1}$. Учитывая, что, $I_1 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$ и $\sin \varphi_1 = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$, окончательно получим: $I = U \sqrt{\frac{R^2 \omega^2 C^2 + (C \omega^2 L - 1)^2}{R^2 + \omega^2 L^2}}$. Как видно из векторной диаграммы (см. рис.), вектор силы тока $\vec{I}$ образует с вектором напряжения $\vec{U}$ угол φ_c. Из рисунка находим $\cos \varphi_c = \frac{I_1 \cos \varphi_1}{I}$. Учитывая, что $\cos \varphi_1 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$, получим $\cos \varphi_c = \frac{R}{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)[R^2 \omega^2 C^2 + (C \omega^2 L - 1)^2]}}$

Выполните самостоятельно следующие задания.

Задание 3.1

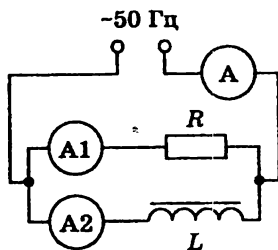


Рис. 1

Каковы показания приборов в цепи, схема которой изображена на рисунке 1. Постройте для схемы, изображенной на рисунке, векторную диаграмму, если напряжение сети $U = 119 \text{ В}$, активное сопротивление $R = 8 \text{ Ом}$, индуктивность $L = 0,048 \text{ Гн}$.

Задание 3.2

Найдите показания приборов в цепи, схема которой представлена на рисунке 2. Напряжение на зажимах цепи $U = 216$ В, $R = 21$ Ом, $L = 70$ мГн, $C = 82$ мкФ. Частота стандартная. Постройте векторную диаграмму сил токов.

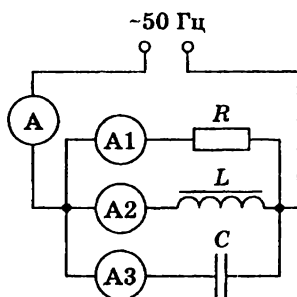


Рис. 2

Задание 3.3

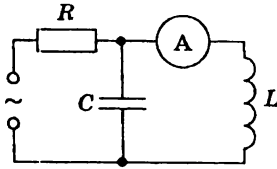


Рис. 3

В цепи, схема которой изображена на рисунке 3, $R = 56 \text{ Ом}$, $C = 106 \text{ мкФ}$ и $L = 159 \text{ мГн}$. Активное сопротивление катушки мало. Частота тока в сети 50 Гц. Определите напряжение в сети U , если амперметр показывает 2,4 А. Постройте векторную диаграмму.

4. Пример выполнения упражнения тренинга на умение № 4.

Задание

Колебательный контур состоит из катушки индуктивности $4 \cdot 10^{-6}$ Гн и конденсатора, емкость которого можно изменять от 0,02 до 0,006 мкФ. Сопротивление контура ничтожно мало. На какой диапазон длин волн можно настроить колебательный контур?

Решение

Выполните последовательность алгоритма, указанную в перечне для умения № 4.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	По формуле Томсона рассчитать граничные периоды колебаний данного контура.	Рассчитаем граничные периоды колебаний $T_1 = 2\pi\sqrt{LC_1} = 1,78 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ $T_2 = 2\pi\sqrt{LC_2} = 0,97 \cdot 10^{-6} \text{ с}$
2	Учитывая, что скорость распространения радиоволн 300000 км/с, вычислить длины волн.	Вычислим длины волн: $\lambda_1 = cT_1 = 532 \text{ м.}$ $\lambda_2 = cT_2 = 292 \text{ м.}$

Выполните самостоятельно следующие задания.

Задание 4.1

В контур включены катушка с переменной индуктивностью от 0,5 до 10 мкГн и конденсатор переменной емкости от 100 до 500 пФ. Какой диапазон частот и длин волн можно охватить настройкой этого контура?

Задание 4.2

Переменный конденсатор меняет свою емкость от $C_1 = 56$ пФ до $C_2 = 667$ пФ. Какой комплект катушек индуктивности нужно иметь, чтобы колебательный контур можно было настраивать на радиостанции в диапазоне от 40 м до 2600 м.

Задание 4.3

Колебательный контур радиоприемника имеет индуктивность $0,32$ мГн и конденсатор переменной емкости. Радиоприемник может принимать электромагнитные волны длиной от 188 до 545 м. В каких пределах изменяется электроемкость конденсатора в приемнике, если активным сопротивлением можно пренебречь?

Рабочий учебник содержит:

понятий – 49

умений – 4

линков – 239

Изд. лиц. ЛР № 071765 от 07.12.1998
Казахстанско-Российский университет
Объем 7 п.л. Тираж 514
